

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 12/10/2009

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/10/2009

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1.

Η πιθανότητα ο Γρηγόρης να πάει για πρωινό τρέξιμο πριν την δουλειά είναι $2/5$. Αν πάει για τρέξιμο, η πιθανότητα να προλάβει το τρένο για τη δουλειά είναι $2/5$. Αν δεν πάει για τρέξιμο, η πιθανότητα να προλάβει το τρένο είναι $1/2$. Αν δεν προλάβει το τρένο τότε παίρνει το λεωφορείο. Αυτό γίνεται από Δευτέρα έως Παρασκευή.

- (α) Σχεδιάστε ένα δέντρο ώστε να δείξετε τις πιθανότητες που περιγράφουν το πρωινό του Γρηγόρη.
- (β) Ποιά είναι η πιθανότητα να προλάβει ο Γρηγόρης το τρένο ένα τυχαίο πρωί ;
- (γ) Γνωρίζετε ότι ο Γρηγόρης πρόλαβε το τρένο. Ποιά η πιθανότητα να πήγε για τρέξιμο ;

Άσκηση 2.

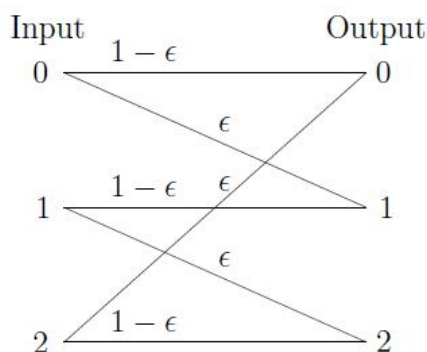
Η πιθανότητα κάποιος άνθρωπος να έχει μια συγκεκριμένη ασθένεια είναι $1/20$. Ο Γιάννης εξετάστηκε για την ασθένεια με μία μέθοδο η οποία δεν είναι απόλυτα ακριβής. Η πιθανότητα ένα άτομο να έχει την ασθένεια και η εξέταση να βγει αρνητική είναι $1/50$ ενώ η πιθανότητα να μην έχει την ασθένεια αλλά η εξέταση να βγει θετική είναι $1/10$. Η εξέταση του Γιάννη είναι θετική.

- (α) Βρείτε την πιθανότητα να έχει την ασθένεια ο Γιάννης.
- (β) Έστω ότι η ασθένεια αυτή είναι κληρονομική. Η πιθανότητα ένα παιδί να έχει την ασθένεια δεδομένου ότι την έχει και ο πατέρας του είναι $4/5$. Η πιθανότητα να έχει την ασθένεια το παιδί δεδομένου ότι δεν την έχει ο πατέρας είναι $1/95$. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχει την ασθένεια ο Στέλιος δεδομένου ότι ο γιός του, Πέτρος, έχει την ασθένεια ;
(Σημείωση: Μπορείτε να υποθέσετε ότι η ασθένεια προσβάλλει μόνο άντρες, οπότε μπορείτε να αγνοήσετε την υγεία της μητέρας του).

Άσκηση 3.

Το διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης για ένα τριαδικό κανάλι επικοινωνίας φαίνεται στο Σχήμα 1. Υποθέστε ότι τα σύμβολα 0, 1 και 2 στέλνονται με πιθανότητες $1/2$, $1/4$ και $1/4$ αντίστοιχα.

- (α) Βρείτε τις πιθανότητες λήψης συμβόλων.
- (β) Δεδομένου ότι λαμβάνεται 1, βρείτε τις πιθανότητες να εστάλη 0, 1 ή 2.
Να απαντήσετε συναρτήσει του όρου ϵ (πιθανότητα λάθους).



Σχήμα 1: Διάγραμμα πιθανοτήτων μεταβάσεων

Άσκηση 4.

Έχετε δύο πεντάεδρα ζάρια. Οι πλευρές του κάθε ζαριού είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το 5. Τα ζάρια είναι δίκαια-αμερόληπτα και κάθε ρίψη του ζαριού είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες.

(α) Σαν γεγονός A ορίζουμε "Ρίχνουμε και τα δύο ζάρια και το άθροισμα είναι 10".

i. Είναι το γεγονός A ανεξάρτητο από το γεγονός "Τουλάχιστον ένα από τα ζάρια φέρνει 5" ;

ii. Είναι το γεγονός A ανεξάρτητο από το γεγονός "Τουλάχιστον ένα από τα ζάρια φέρνει 1" ;

(β) Σαν γεγονός B ορίζουμε "Ρίχνουμε και τα δύο ζάρια και το άθροισμα είναι 8".

i. Είναι το γεγονός B ανεξάρτητο από το να έρθουν διπλές ; (Με τον όρο διπλές εννοούμε να φέρουν τον ίδιο αριθμό και τα δύο ζάρια).

ii. Δεδομένου ότι η ρίψη των ζαριών φέρνει άθροισμα 8, ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα ζάρια να είχε φέρει 3 ;

iii. Δεδομένου ότι η ρίψη των ζαριών φέρνει άθροισμα 8, ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένα από τα ζάρια να είχε φέρει 5 ;

Άσκηση 5.

Υποθέστε ότι ένας παίχτης ρίχνει 2 εξάπλευρα ζάρια (με πλευρές 1, 2, ..., 6). Το ένα είναι μπλέ και το άλλο κόκκινο. Ένα ζάρι είναι δίκαιο ή αμερόληπτο αν όλες οι πλευρές του είναι ισοπίθανες κατά τη ρίψη. Διαφορετικά δεν είναι αμερόληπτο.

(α) Υποθέστε ότι και τα 2 ζάρια είναι αμερόληπτα. Ποιά είναι η πιθανότητα ο αριθμός που εμφανίζεται με την ρίψη του μπλέ ζαριού να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό που θα εμφανιστεί μετά την ρίψη του κόκκινου ζαριού ;

(β) Εξακολουθούμε να υποθέτουμε ότι τα 2 ζάρια είναι αμερόληπτα. Ποιά είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ο αριθμός που εμφανίζεται με την ρίψη του μπλέ ζαριού να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό που θα εμφανιστεί μετά την ρίψη του κόκκινου ζαριού δεδομένου ότι το μπλέ ζάρι δεν φέρνει 6 ;

(γ) Υποθέστε ότι το κόκκινο ζάρι είναι αμερόληπτο και ότι ο παίχτης κερδίζει όταν το άθροισμα των αριθμών που εμφανίζονται είναι 7. Σχεδιάστε ένα πιθανοτικό νόμο για το μπλέ ζάρι (δεν είναι αμερόληπτο), δηλαδή υπολογίστε πιθανότητες για τα 1, 2, ..., 6, ο οποίος μεγιστοποιεί την πιθανότητα του παίχτη να κερδίσει. Αν η απάντηση δεν είναι μοναδική να εξηγήσετε το λόγο.

Άσκηση 6.

Έχουμε 3 ανθρώπους και ο καθένας τους ρίχνει μία φορά ένα αμερόληπτο ζάρι n -πλευρών. Ας ορίσουμε σαν A_{ij} το γεγονός όπου ο άνθρωπος i και ο άνθρωπος j φέρνουν την ίδια πλευρά κατά την ρίψη. Δείξτε ότι τα γεγονότα A_{12} , A_{13} και A_{23} είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα αλλά δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 7.

Το ζάρι A έχει 5 πλευρές μπλέ χρώματος και 1 πλευρά ρόζ χρώματος. Το ζάρι B έχει 3 πλευρές μπλέ χρώματος και 3 πλευρές ρόζ χρώματος. Στρίβουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα. Αν έρθει κορώνα συνεχίζουμε το παιχνίδι ρίχνοντας το ζάρι A επαναληπτικά. Αν έρθει γράμματα τότε μόνο το ζάρι B χρησιμοποιείται για να συνεχιστεί το παιχνίδι.

(α) Προσδιορίστε την πιθανότητα ότι η n -στή ρίψη ζαριού θα φέρει μπλέ.

(β) Προσδιορίστε την πιθανότητα ότι η n -στή και η $n + 1$ -στή ρίψεις ζαριού θα φέρουν και οι δύο μπλέ.

(γ) Αν οι πρώτες n ρίψεις φέρουν μπλέ πλευρά, προσδιορίστε την δεσμευμένη πιθανότητα να έρθει μπλέ στην $n + 1$ ρίψη. Να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα για μεγάλες τιμές του n .