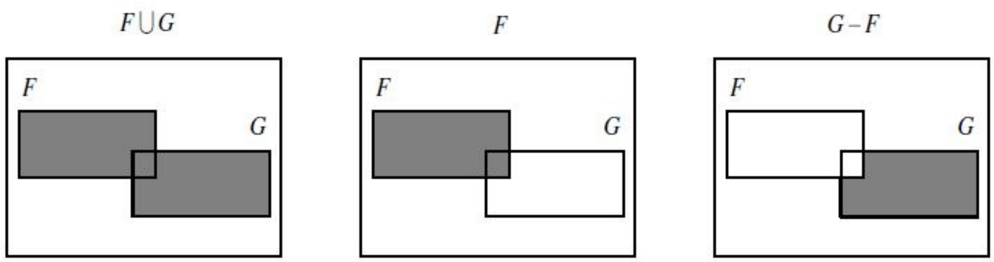
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

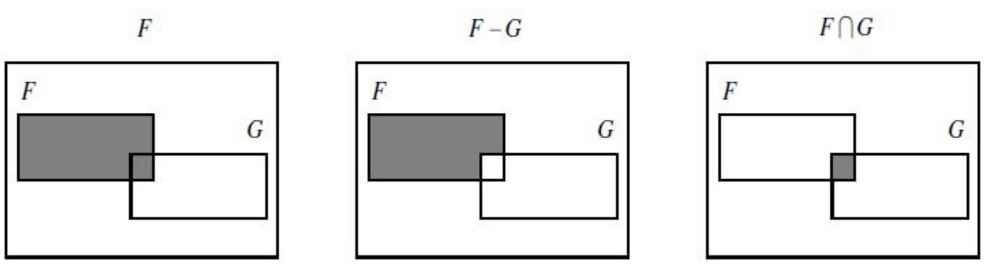
Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/09/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/10/2009

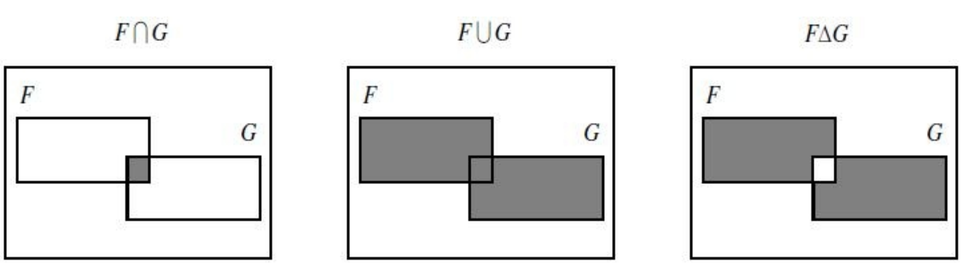
Άσκηση 1.
Τα διαγράμματα *Venn* που εμφανίζονται στα σχήματα 1,2,3 και 4 αντιστοιχούν στα ερωτήματα α, β, δ και ε. Για το ερώτημα γ, η πιθανότητα $P(F \cup G)$ μπορεί να εκφραστεί σαν $P(F - G) + P(G - F) + P(F \cap G)$.



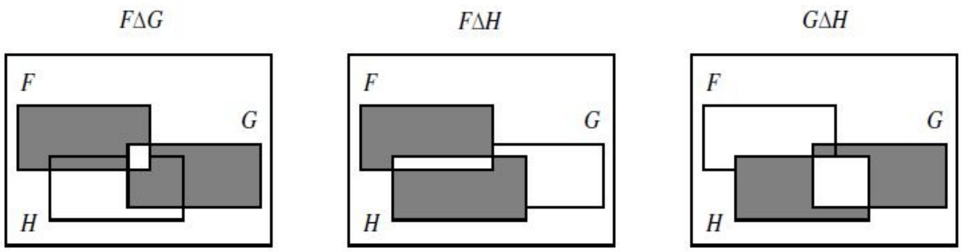
Σχήμα 1: Διάγραμμα *Venn* του προβλήματος 1(α)



Σχήμα 2: Διάγραμμα *Venn* του προβλήματος 1(β)



Σχήμα 3: Διάγραμμα *Venn* του προβλήματος 1(δ)



Σχήμα 4: Διάγραμμα $Venn$ του προβλήματος 1(ε)

Άσκηση 2. **(α)** Θεωρήστε:

$$\begin{aligned}
P(\{(k,m) : k \geq m\}) &= \sum \sum_{(k,m):k \geq m} p(k,m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} p^2(1-p)^{k+m-2} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p^2(1-p)^{k+m-2} \\
&= \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \\
&= \frac{p^2}{(1-p)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (1-p)^{2m} \frac{1}{1-(1-p)} = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}
\end{aligned}$$

(β) Θεωρήστε:

$$\begin{aligned}
P(\{(k,m) : k+m = r\}) &= \sum \sum_{(k,m):k+m=r} p(k,m) \\
&= \sum_{m=1}^{r-1} p^2(1-p)^{m+(r-m)-2} = \sum_{m=1}^{r-1} p^2(1-p)^{r-2} \\
&= p^2(1-p)^{r-2} \sum_{m=1}^{r-1} 1 = p^2(1-p)^{r-2}(r-1)
\end{aligned}$$

(γ) Θεωρήστε:

$$\begin{aligned}
P(\{(k,m) : \textit{όπου κ περιττός}\}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} p^2(1-p)^{(2k-1)+m-2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^{2k} \sum_{m=0}^{\infty} p(1-p)^m = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}
\end{aligned}$$

Άσκηση 3.
(α) Ας ελέγξουμε αν η $P(F)$ ικανοποιεί τα τρία αξιώματα. Είναι προφανές ότι είναι θετική από τον ορισμό. Ακόμη $P(\Omega) = 1$ επειδή το $0 \in \Omega$ και το $1 \in \Omega$. Τέλος θεωρήστε ότι:

$$P(F \cup G) = \begin{cases} 1/2, \textit{αν } 0 \in F \cup G \textit{ή } 1 \in F \cup G, \textit{αλλά όχι και τα δύο} \\ 1, \textit{αν } 0 \in F \cup G \textit{και } 1 \in F \cup G \\ 0, \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

$i.$ $0 \in F, 0 \in G, 1 \in F, 1 \in G$. Δεν είναι ξένα.
$ii.$ $0 \in F, 0 \in G, 1 \in F, 1 \notin G$. Δεν είναι ξένα.
$iii.$ $0 \in F, 0 \in G, 1 \notin F, 1 \in G$. Δεν είναι ξένα.
$iv.$ $0 \in F, 0 \in G, 1 \notin F, 1 \notin G$. Δεν είναι ξένα.
$v.$ $0 \in F, 0 \notin G, 1 \in F, 1 \in G$. Δεν είναι ξένα.
$vi.$ $0 \in F, 0 \notin G, 1 \in F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 1, P(G) = 0$.
$vii.$ $0 \in F, 0 \notin G, 1 \notin F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 1, P(F) = 1/2, P(G) = (1/2)$.
$viii.$ $0 \in F, 0 \notin G, 1 \notin F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 1/2, P(F) = 1/2, P(G) = 0$.
$ix.$ $0 \notin F, 0 \in G, 1 \in F, 1 \in G$. Δεν είναι ξένα.
$x.$ $0 \notin F, 0 \in G, 1 \in F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 1, P(F) = 1/2, P(G) = 1/2$.
$xi.$ $0 \notin F, 0 \in G, 1 \notin F, 1 \in G$. $P(F \cup G) = 1, P(F) = 0, P(G) = 1$.
$xii.$ $0 \notin F, 0 \in G, 1 \notin F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 1/2, P(F) = 0, P(G) = 1/2$.
$xiii.$ $0 \notin F, 0 \notin G, 1 \in F, 1 \in G$. Δεν είναι ξένα.
$xiv.$ $0 \notin F, 0 \notin G, 1 \in F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 1/2, P(F) = 1/2, P(G) = 0$.
$xv.$ $0 \notin F, 0 \notin G, 1 \notin F, 1 \in G$. $P(F \cup G) = 1/2, P(F) = 0, P(G) = 1/2$.
$xvi.$ $0 \notin F, 0 \notin G, 1 \notin F, 1 \notin G$. $P(F \cup G) = 0, P(F) = 0, P(G) = 0$.

Ικανοποιούνται και τα τρία αξιώματα. Επομένως η $P(F)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας.

(β) Ελέγχουμε πάλι αν η $P(F)$ ικανοποιεί τα τρία αξιώματα. Αν υποθέσουμε ότι ο C είναι μη-αρνητικός αριθμός τότε και η $P(F)$ είναι μη-αρνητική επειδή είναι άθροισμα θετικών αριθμών. Ακόμη:

$$P(\Omega) = \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{91}{C}$$

Εαν επιλέξουμε $C = 91$, τότε $P(\Omega) = 1$. Τέλος ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 γεγονότα F και G ξένα μεταξύ τους. Τότε:

$$P(F \cup G) = \frac{1}{91}\sum_{i \in (F \cup G)} i^2 = \frac{1}{91}(\sum_{i \in F} i^2 + \sum_{i \in G} i^2) = P(F) + P(G).$$

Επομένως η $P(F)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας.

(γ) Δεν μπορεί να είναι συνάρτηση πιθανότητας. Σκεφτείτε ότι

$$P(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x \; dx = 0.$$

Ακόμη είναι εύκολο να κατασκευαστεί ένα γεγονός G ώστε $P(G) < 0$. Για παράδειγμα, θεωρήστε $G = [\pi, 2\pi]$.

Άσκηση 4.

Η συνάρτηση πιθανότητας μπορεί να προσδιοριστεί με αντιστοίχιση πιθανοτήτων σε υποδιαστήματα του [-1, 1]. Αφού επιλέγουμε τα αποτελέσματα τυχαία, η πιθανότητα ενός διαστήματος $[a, b]$, όπου $-1 \leq a \leq 1$ είναι $\frac{1}{2}(b - a)$ και είναι η ίδια ανεξάρτητως κλειστού, ανοιχτού ή ημι-ανοιχτού διαστήματος. Εκφράζοντας οποιοδήποτε σύνολο σαν μετρήσιμες ενώσεις, τομές και συμπληρώματα διαστημάτων, και χρησιμοποιώντας τα αξιώματα των πιθανοτήτων, μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα οποιουδήποτε άλλου συνόλου ($Borel$).

(α) Οι πιθανότητες είναι:

$$P(B) = P((-0.5, 1)) = \frac{3}{4}$$
$$P(A \cap B) = P((-0.5, 0)) = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cap C) = P(\emptyset) = 0$$

(β) Οι πιθανότητες είναι:

$$P(A \cup B) = P([-1, 1)) = 1$$
$$P(A \cup C) = P([-1, 0) \cup (0.75, 1)) = \frac{5}{8}$$
$$P(A \cap B \cap C) = P([-1, 1]) = 1$$

Άσκηση 5.
Γενικά, η πιθανότητα της ένωσης δύο γεγονότων είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

και η πιθανότητα της τομής είναι:

$$P(A \cap B) = P(A) - P(B - A) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Δεδομένου ότι $P(A) \geq 0.9$ και $P(B) \geq 0.8$ έχουμε:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1 = 0.9 + 0.8 - 1 = 0.7$$

Αυτό είναι το καλύτερο δυνατό φράγμα. Θεωρήστε $A = [0.0, 0.9], B = [0.2, 1.0]$ με ομοιόμορφη πιθανότητα στο μοναδιαίο διάστημα $[0.0, 1.0]$.

Άσκηση 6.
(α) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας για να υπολογίσουμε:

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P((A \cup B)^c)}{P(B^c)} = 1 - \frac{P(A \cup B)}{P(B^c)} = \frac{0.3}{0.4} = \frac{3}{4}$$

(β) Ομοίως:

$$P(B^c|A) = 1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{1}{7}$$

Άσκηση 7.
(α) Ας αποδείξουμε ότι $S_n - rS_n = 1 - r^n$:

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= \sum_{k=0}^{n-1} r^k - \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^k - \sum_{k=1}^{n} r^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} r^k - \sum_{k=1}^{n-1} r^k - r^n = 1 - r^n \end{aligned}$$

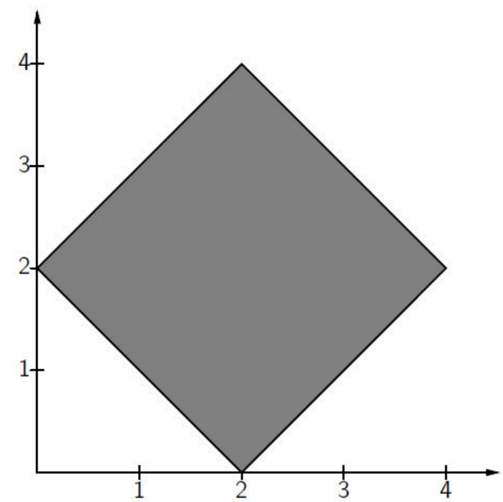
Επομένως:

$$S_n = (1 - r^n)/(1 - r)$$

(β) Επειδή ο παράγοντας r^n βρίσκεται στον αριθμητή, το όριο αυτό θα είναι πεπερασμένο μόνο αν το r^n φθίνει καθώς το $n \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το S_n συγκλίνει αν και μόνο αν $|r| < 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, το S_n συγκλίνει στο $1/(1 - r)$.

Άσκηση 8.

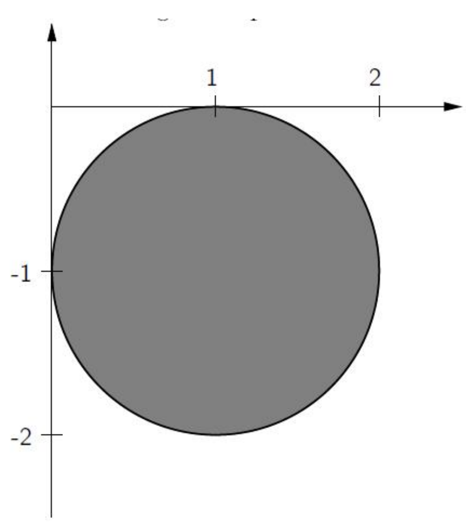
(α) Αν προσπαθήσουμε να σχεδιάσουμε την περιοχή που διαμορφώνουν οι εξισώσεις (βλ. Σχήμα 5), έχουμε:



Σχήμα 5: Περιοχή που προκύπτει από: $|x - 2| + |y - 2| \leq 2$.

Αποτελεί τετράγωνο με μήκος πλευρών $2\sqrt{2}$. Η απάντηση είναι 8.

(β) Ομοίως, σχεδιάζουμε την περιοχή που προκύπτει από τις εξισώσεις μας (βλ. Σχήμα 6).



Σχήμα 6: Περιοχή που προκύπτει από:$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \leq$ 1.

Αποτελεί κύκλο με ακτίνα 1. Η απάντηση είναι π.

(γ)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-2y} dx\ dy &= \int_0^\infty e^{-2y} [-e^{-x}]|_0^\infty dy \\
&= \int_0^\infty e^{-2y} dy \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2y}|_0^\infty \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$