ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2009
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Ημερομηνία Ανάθεσης: 30/09/2009 Ημερομηνία Παράδοσης: 12/10/2009

Άσκηση 1.
Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες χρησιμοποιώντας διαγράμματα $Venn$. Σημειώστε οτι η διαφορά ισούται με $F - G = F \cap G^c$ και η συμμετρική διαφορά ως $F \triangle G = (F \cap G^c) \cup (G \cap F^c)$.
(α) $F \cup G = F \cup (G - F)$
(β) $F = (F - G) \cup (F \cap G)$
(γ) Γράψτε το $F \cup G$ σαν ένωση τριών ξένων συνόλων. Χρησιμοποιήστε τα δύο προηγούμενα ερωτήματα.
(δ) $F \cap G = (F \cup G) - (F \triangle G)$
(ε) Για κάθε γεγονός F, G και H δείξτε ότι $P(F \triangle G) \leq P(F \triangle H) + P(H \triangle G)$

Με λόγια: αν η πιθανότητα της συμμετρικής διαφοράς των δύο γεγονότων είναι μικρή, τότε τα δύο γεγονότα πρέπει να έχουν περίπου την ίδια πιθανότητα. Μπορείτε να παρατηρήσετε ότι μοιάζει με την τριγωνική ανισότητα. Θεωρούμε την $P(F \triangle G)$ ως απόσταση ή μετρική στα γεγονότα.

Άσκηση 2.
Θεωρήστε ότι έχουμε ένα χώρο πιθανοτήτων ο οποίος έχει δειγματοχώρο το σύνολο

$$\Omega = \{1, 2, 3, ...\}^2 = \{(k, m) : k, m \in \mathcal{Z}^+\}$$

δηλαδή όλα τα ζευγάρια θετικών ακεραίων. Το σύνολο των γεγονότων (σ-άλγεβρα) είναι το δυναμοσύνολο του Ω και το μέτρο πιθανότητας (πιθανοτικός νόμος) στο δειγματοχώρο είναι

$$P((k, m)) = p^2(1-p)^{k+m-2},\ 0 < p < 1.$$

Να υπολογίσετε τις παρακάτω πιθανότητες
(α) $P(\{(k, m) : k \geq m\})$.
(β) $P(\{(k, m) : k + m = r\})$ σαν μια συνάρτηση του r, για $r = 2, 3, 4, ...$
(γ) $P(\{(k, m) : \textit{όπου κ περιττός}\})$

Άσκηση 3.
Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις συνόλων είναι συναρτήσεις πιθανότητας (ικανοποιούν τα τρία αξιώματα) ; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α) $\Omega = [0, 1]$, όπου το P δίνεται από τη σχέση

$$P(F) = \begin{cases} 1/2, \textit{αν } 0 \in F \textit{ ή } 1 \in F, \textit{αλλά όχι και τα δύο} \\ 1, \textit{αν } 0 \in F \textit{και } 1 \in F \\ 0, \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(F) = \frac{1}{C} \sum_{i \in F} i^2$$

όπου το C είναι μια σταθερά.

(γ) $\Omega = real\ line$

$$P(F) = \int_F \sin x\ dx$$

Άσκηση 4.
Ένας αριθμός x επιλέγεται τυχαία στο διάστημα [-1, 1]. Υποθέστε τα γεγονότα

$$\begin{aligned} A &= \{x < 0\} \\ B &= \{|x - 0.5| < 1\} \\ C &= \{x > 0.75\} \end{aligned}$$

(α) Να βρείτε τις πιθανότητες των $B, A \cap B$ και $A \cap C$.
(β) Να βρείτε τις πιθανότητες των $A \cup B, A \cup C$ και $A \cup B \cup C$.

Άσκηση 5.
Έστω τα γεγονότα A και B με $P(A) \geq 0.9$ και $P(B) \geq 0.8$. Δείξτε ότι $P(A \cap B) \geq 0.7$.

Άσκηση 6.
Έστω $P(A) = 0.7, P(B^c) = 0.4$ και $P(A \cup B) = 0.7$. Να βρείτε τις παρακάτω πιθανότητες:
(α) $P(A^c|B^c)$
(β) $P(B^c|A)$

Άσκηση 7.
Έστω ότι έχουμε την γεωμετρική ακολουθία

$$S_n = \begin{cases} 1,\ n = 1 \\ \sum_{k=0}^{n-1} r^k,\ n = 2, 3, ... \end{cases}$$

όπου το r είναι μιγαδικός αριθμός.
(α) Δείξτε ότι αν $r \neq 1$, τότε $S_n - rS_n = 1 - r^n$, αποδεικνύοντας τον γνωστό τύπο γεωμετρικής ακολουθίας

$$S_n = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

(β) Κάτω από ποιές προυποθέσεις συγκλίνει το S_n καθώς το $n \to \infty$; Σε τι συγκλίνει ;

Άσκηση 8.
Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας γραφικές παραστάσεις.
(α) $\int\int_{\{(x,y):|x-2|+|y-2|\leq 2\}} dx\ dy$
(β) $\int\int_{\{(x,y):\sqrt{|x-1|^2+|y+1|^2}\leq 1\}} dx\ dy$
(γ) $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x}e^{-2y} dx\ dy$