

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Προόδου
Διδάσκων: Π.Τσακαλίδης
15 Νοεμβρίου 2008 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες: Βασικές Έννοιες.

(α)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)P(A^c)$$

καθώς:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B), \text{ αφού } A, B \text{ είναι ανεξάρτητα} \\ &= P(A) + P(B)(1 - P(A)) \\ &= P(A) + P(B)P(A^c) \end{aligned}$$

(β)

$$P((C \cap D)^c) \leq P(C^c) + P(D^c)$$

καθώς:

$$\begin{aligned} P((C \cap D)^c) &= P(C^c \cup D^c) \\ &= P(C^c) + P(D^c) - P(C^c \cap D^c) \\ &\leq P(C^c) + P(D^c) \end{aligned}$$

(γ)

$$p_X(x) \geq p_{X,Y}(x, y)$$

καθώς

$$p_X(x) \geq p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x) = p_{X,Y}(x, y)$$

(δ)

$$p_Y(y) \leq p_Z(g(y))$$

καθώς

$$p_Z(g(y)) = \sum_{y': g(y')=g(y)} p_Y(y') \geq p_Y(y)$$

(ε)

$$E[X^2] \geq \text{var}(X)$$

καθώς

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \leq E[X^2]$$

Θέμα 2 - 25 μονάδες: Παιχνίδι τύχης σε πολλά ανεξάρτητα στάδια.

(α) Προφανώς, χρειάζεται να κερδίσει τουλάχιστον δύο φορές για κάθε φορά (εβδομάδα) που χάνει. Συνεπώς σε μια διάρκεια 5 εβδομάδων πρέπει να φέρει είτε 4 φορές κεφαλή ($W_5 = 4$) είτε 5 φορές κεφαλή ($W_5 = 5$), για να έχει στο τέλος στην κατοχή του περισσότερα από 1 ευρώ.

$$\begin{aligned} P(\{4K \text{ σε } 5 \text{ εβδομάδες}\} \cup \{5K \text{ σε } 5 \text{ εβδομάδες}\}) &= \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{2} + \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= 5 \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \\ &= \frac{3}{16} \\ &= 0.1875 \end{aligned}$$

(β)

$$E[X_i] = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{8}$$

Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των X_i , έχουμε ευκολα:

$$E[W_n] = E[X_1 X_2 \cdots X_n] = E[X_1] \cdots E[X_n] = \left(\frac{9}{8}\right)^n.$$

Για $n = 10$ έχουμε $E[W_{10}] = 3,25\text{€}$ και για $n = 100$ έχουμε $E[W_{100}] \approx 130.992\text{€}$.**(γ)**

$$E[X_i^2] = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{65}{32}$$

$$E[W_n^2] = E[X_1^2 X_2^2 \cdots X_n^2] = E[X_1^2] \cdots E[X_n^2] = \left(\frac{65}{32}\right)^n.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \sigma_{W_n} &= \sqrt{\text{var}(W_n)} \\ &= \sqrt{E[W_n^2] - (E[W_n])^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{65}{32}\right)^n - \left(\frac{9}{8}\right)^{2n}} \\ &= \sqrt{\frac{(130^n - 81^n)}{64^n}} \\ &\approx \sqrt{\left(\frac{130}{64}\right)^n} \text{ για μεγάλα } n \\ &\approx (\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

Για $n = 10$ έχουμε $\sigma_{W_n} = 32$ και για $n = 100$ έχουμε $\sigma_{W_n} = 10^{15}$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλα n , $\sigma_{W_n} \gg E[W_n]$.**Θέμα 3 - 30 μονάδες: Δοκιμές Bernoulli, δεσμευμένες και ολικές πιθανότητες****(α)** Προφανώς η τ.μ. A είναι διωνυμική, δηλαδή $A \sim \Delta(n, p)$. Επομένως:

$$p_A(a) = \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a}, a = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Συνεπώς:

$$E[A] = np \text{ και } \text{var}(A) = np(1-p)$$

Εννοείται ότι και η B είναι διωνυμική τ.μ. με $B \sim \Delta(n, 1-p)$ και

$$E[B] = n(1-p) \text{ και } \text{var}(B) = np(1-p)$$

(β) Ονομάζουμε $L = \{\text{το πρώτο αρχείο που σώζεται και καταλήγει μόνο του στο δίσκο}\}$. Ορίζουμε $F_A = \{\text{το πρώτο αρχείο σώζεται στον δίσκο Α}\}$ και $F_B = \{\text{το πρώτο αρχείο σώζεται στον δίσκο Β}\}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} P(L) &= P(L|F_A) \cdot P(F_A) + P(L|F_B) \cdot P(F_B) \\ &= (1-p)^{n-1} \cdot p + p^{n-1}(1-p) \end{aligned}$$

(γ) Ορίζουμε $E_A = \{\text{ο δίσκος Α περιέχει ένα αρχείο}\}$, $E_B = \{\text{ο δίσκος Β περιέχει ένα αρχείο}\}$ και $E = \{\text{τουλάχιστον ένας από τους δύο δίσκους περιέχει ακριβώς ένα αρχείο}\}$. Προφανώς, $E = E_A \cup E_B$ και $P(E) = P(E_A) + P(E_B) - P(E_A \cap E_B)$.

- Για $n \neq 2$ έχουμε $P(E_A \cap E_B) = 0$. Συνεπώς

$$P(E) = P(E_A) + P(E_B) = \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} + \binom{n}{1}(1-p)p^{n-1}$$

καθώς τόσο η A , όσο και η B είναι διωνθμικές τ.μ., δηλαδή: $A \sim \Delta(n, p)$ και $B \sim \Delta(n, 1-p)$.

- Για $n = 2$:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_A) + P(E_B) - P(E_A \cap E_B) \\ &= 2p(1-p) + 2(1-p)p - 2p(1-p) \\ &= 2p(1-p) \end{aligned}$$

(6) Προφανώς, $E[D] = E[A] - E[B] = np - n(1-p) = n(2p-1)$. Για να υπολογίσουμε την διασπορά του D δεν αρκεί να προσθέσουμε τις διασπορές των A και B , αφού αυτές δεν είναι ανεξάρτητες. Μάλιστα, $A + B = n \rightarrow B = n - A$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \text{var}(D) &= \text{var}(A - B) = \text{var}(A - n + A) = \text{var}(2A - n) \\ &= 4\text{var}(A) = 4np(1-p) \end{aligned}$$

(ε) Ονομάζουμε $C = \{\text{τα δύο πρώτα αρχεία σώζονται στο δίσκο A}\}$ και

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{το } i\text{-οστό αρχείο σώζεται στο δίσκο A} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Προφανώς οι $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες Bernoulli. Συνεπώς:

$$\begin{aligned} E[A|C] &= E\left[2 + \sum_{i=3}^n X_i\right] \\ &= 2 + \sum_{i=3}^n E[X_i] \\ &= 2 + (n-2)p \\ \text{var}(A|C) &= \text{var}\left(2 + \sum_{i=3}^n X_i\right) \\ &= \text{var}\left(\sum_{i=3}^n X_i\right) \\ &= \sum_{i=3}^n \text{var}(X_i) \\ &= (n-2)p(1-p) \\ p_{A|C}(a) &= P(A = a|C) \\ &= \frac{P(A = a \cap C)}{P(C)} \end{aligned}$$

Αλλά $P(C) = p^2$. Επίσης: $P(A = a \cap C) = 0$ για $a = 0, 1$. Για $a \geq 2$:

$$\begin{aligned} P(A = a \cap C) &= P(C \cap \{a-2 \text{ αρχεία από τα τελευταία } n-2 \text{ σώζονται στο A}\}) \\ &= P(C) \cdot P(\{a-2 \text{ αρχεία από τα τελευταία } n-2 \text{ σώζονται στο A}\}) \\ &= p^2 \binom{n-2}{a-2} p^{a-2} \cdot (1-p)^{n-a}, a = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

Άρα:

$$p_{A|C}(a) = \binom{n-2}{a-2} p^{a-2} \cdot (1-p)^{n-a}, a = 2, 3, \dots, n$$

Θέμα 4 - 25 μονάδες: Από κοινού συναρτήσεις πιθανότητας.

(α) Από την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πιθανότητας των X και Y είναι προφανές ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες, καθώς:

$$p_{X,Y}(x, y) = c_1 x^2 \cdot c_2 \sqrt{y} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

για τις κατάλληλες σταθερές c_1 και c_2 . Συνεπώς: $E[XY^3] = E[X] \cdot E[Y^3]$. Αλλά η πιθανότητα της X είναι $p_X(x) = c_1 \cdot x^2$ είναι συμμετρική γύρω από το 0, άρα $E[XY^3] = 0 \cdot E[Y^3] = 0$.

(β) (i) Ονομάζουμε $L_i = \{\text{ο Χρήστος έπαιξε την εβδομάδα } i\}$ και $W_i = \{\text{ο Χρήστος κέρδισε την εβδομάδα } i\}$. Συνεπώς ισχύουν ότι $P(L_i) = p$ και $P(W_i|L_i) = q$. Τότε:

$$\begin{aligned} P(L_i|W_i^c) &= \frac{P(W_i^c|L_i) \cdot P(L_i)}{P(W_i^c|L_i) \cdot P(L_i) + P(W_i^c|L_i^c) \cdot P(L_i^c)} \\ &= \frac{(1-q) \cdot p}{(1-q) \cdot p + 1 \cdot (1-p)} \\ &= \frac{p-pq}{1-pq} \end{aligned}$$

(ii) Δεδομένης της X , η Y είναι διωνυμική $Y \sim \Delta(x, q)$. Συνεπώς:

$$p_{Y|X}(y|x) = \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y}, 0 \leq y \leq x$$

(iii)

$$p_{X,Y}(x, y) = p_{Y|X}(y|x) \cdot p_X(x) = \binom{x}{y} q^y (1-q)^{x-y} \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, 0 \leq y \leq x \leq n$$

καθώς $X \sim \Delta(n, p)$.