

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
15 Νοεμβρίου 2008 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες: Βασικές έννοιες.

Αντικαταστήστε το **vs.** στις ακόλουθες εκφράσεις με ένα εκ των συμβόλων $=$, $\geq$, ή $\leq$. Αιτολογείστε πλήρως την απάντησή σας.

(α) $P(A \cup B)$ vs. $P(A) + P(B)P(A^c)$ όταν τα A και B είναι ανεξάρτητα.

(β) $P((C \cap D)^c)$ vs. $P(C^c) + P(D^c)$.

(γ) $p_X(x)$ vs. $p_{X,Y}(x,y)$, όπου X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.), $p_X(x)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της X , και $p_{X,Y}(x,y)$ είναι η από κοινού σ.π. των X και Y .

(δ) $p_Y(y)$ vs. $p_Z(g(y))$ όπου $Z = g(Y)$.

(ε) $E[X^2]$ vs. $var(X)$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες: Παιχνίδι τύχης σε πολλά ανεξάρτητα στάδια.

Στο παιχνίδι "Διπλασιάζω ή Τεταρτιάζω," ένα δίκαιο κέρμα ρίχνεται διαδοχικά και ανεξάρτητα. Ο παίκτης λαμβάνει πίσω το διπλάσιο του ποσού που πόνταρε όταν έρχεται κεφαλή, αλλά μόνο το ένα τέταρτο του ποσού όταν έρχονται γράμματα. Ποντάρει 1 ευρώ στην πρώτη ρίψη του κέρματος και συνεχίζει ποντάροντας όλα τα λεφτά του σε κάθε μία από τις επόμενες ρίψεις.

Για παράδειγμα, λαμβάνει πίσω 2 ευρώ αν η πρώτη ρίψη φέρει κεφαλή, αλλά μόνο 0,25 ευρώ αν η πρώτη ρίψη φέρει γράμματα. Στη δεύτερη ρίψη ποντάρει το συνολικό ποσό που διαθέτει (δηλαδή είτε τα 2 είτε τα 0,25 ευρώ) και λαμβάνει πίσω το διπλάσιο αν έρθει κεφαλή ή το ένα τέταρτο αν έρθουν γράμματα.

Το συνολικό ποσό που έχει ο παίκτης μετά από n ρίψεις συμβολίζεται από την τ.μ. W_n , η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$W_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n,$$

όπου οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες και έχουν συνάρτηση πιθανότητας $P(X_i = 2) = P(X_i = \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ο παίκτης να κερδίζει λεφτά (δηλαδή να διαθέτει περισσότερα από 1 ευρώ) μετά από 5 ρίψεις του ζαριού.

(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή του συνολικού ποσού, $E[W_n]$, που έχει ο παίκτης μετά από n ρίψεις.

(γ) Υπολογίστε τη τυπική απόκλιση του συνολικού ποσού, σ_{W_n} , που έχει ο παίκτης μετά από n ρίψεις. Συγκρίνετε τις τιμές των $E[W_n]$ και σ_{W_n} για μεγάλα n (π.χ. $n = 100$). Τι παρατηρείτε;

Θέμα 3 - 30 μονάδες: Δοκιμές Bernoulli, δεσμευμένες και ολικές πιθανότητες

Έχουμε συνολικά n αρχεία τα οποία θέλουμε να αποθηκεύσουμε. Κάθε αρχείο σώζεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα είτε στον σκληρό δίσκο Α (με πιθανότητα p) είτε στον σκληρό δίσκο Β (με πιθανότητα $1 - p$). Έστω A το πλήθος των αρχείων που σώζονται στο δίσκο Α και έστω B το πλήθος των αρχείων που σώζονται στο δίσκο Β.

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας, τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. A .
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το πρώτο αρχείο που σώζεται καταλήγει να είναι και το μοναδικό αρχείο στο δίσκο στον οποίο έχει σωθεί. (Χρησιμοποιήστε το θεώρημα ολικής πιθανότητας.)
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τουλάχιστον ένας από τους δύο δίσκους περιέχει ακριβώς ένα αρχείο. (Διαχωρείστε τις περιπτώσεις για $n = 2$ και $n \neq 2$.)
- (δ) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της διαφοράς $D = A - B$.
- (ε) Έστω $n \geq 2$. Δεδομένου του γεγονότος ότι τα δύο πρώτα αρχεία σώζονται στο δίσκο Α, υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή, τη διασπορά, και τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. A .

Θέμα 4 - 25 μονάδες: Από κοινού συναρτήσεις πιθανότητας.

- (α) Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των διακριτών τ.μ. X και Y δίνεται από τη σχέση

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Cx^2\sqrt{y} & \text{αν } x = -5, -4, \dots, +4, +5 \text{ και } y = 0, 1, \dots, 10 \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

όπου C είναι κατάλληλη σταθερά. Υπολογίστε το $E[XY^3]$.

(β) Κάθε βδομάδα ο Χρήστος παίζει στη λοταρία με πιθανότητα p και ανεξάρτητα από εβδομάδα σε εβδομάδα. Κάθε φορά που παίζει κερδίζει με πιθανότητα q , και πάλι ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Για ένα καθορισμένο αριθμό εβδομάδων n , έστω X το πλήθος των εβδομάδων που ο Χρήστος έχει παίξει στη λοταρία και έστω Y το πλήθος των εβδομάδων όπου έχει κερδίσει.

(i) Ποια είναι η πιθανότητα ότι έπαιξε στη λοταρία μία τυχαία εβδομάδα δεδομένου ότι δεν κέρδισε τίποτα εκείνη την εβδομάδα;

(ii) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. $p_{Y/X}(y/x)$.

(iii) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. $p_{X,Y}(x,y)$.

Στα (ii) και (iii) ορίστε πλήρως τα πεδία τιμών των τ.μ. X και Y .