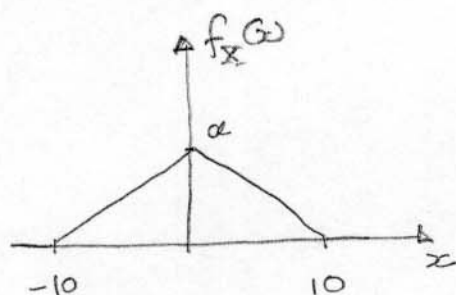


ΘΕΜΑ 1ο

(α)



Πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$. Από το

σχήμα έχουμε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι $20 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{2} = 10\alpha$.

Επομένως $10\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/10$.

(β) Από το σχήμα είναι φανερό ότι η $f_X(x)$ είναι άρτια συνάρτηση, συνεπώς $E[X] = 0$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx \\ &= 2 \int_0^{10} 0.1(1-0.1x) x^2 dx = \frac{50}{3} = 16.67. \end{aligned}$$

(γ) $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$. Προφανώς, για $x < -10$, $F_X(x) = 0$ ενώ

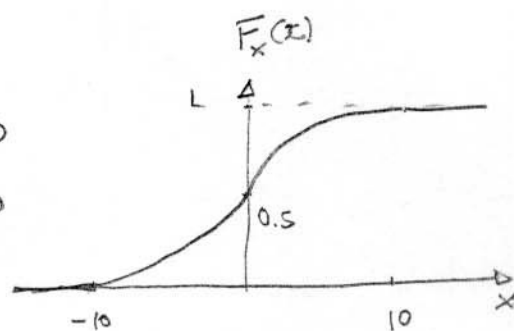
για $x \geq 10$, $F_X(x) = 1$.

Για $-10 \leq x < 0$, $F_X(x) = \int_{-10}^x 0.1(1+0.1t) dt$
 $= 0.1t + 0.01 \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-10}^x = 0.005(x+10)^2$.

Για $0 \leq x < 10$, $F_X(x) = \int_{-10}^0 0.1(1+0.1t) dt + \int_0^x 0.1(1-0.1t) dt$
 $= \frac{1}{2} + (0.1t - 0.01 \frac{1}{2} t^2) \Big|_0^x = 1 - 0.005(x-10)^2$.

Συνεπώς,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < -10 \\ 0.005(x+10)^2 & , -10 \leq x < 0 \\ 1 - 0.005(x-10)^2 & , 0 \leq x < 10 \\ 1 & , 10 \leq x \end{cases}$$



$$(8) \quad P(|X| \leq 3) = P(-3 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-3) \quad (2)$$

$$= 1 - 0.005(3-10)^2 - 0.005(-3+10)^2 = 0.51.$$

ΘΕΜΑ 2ο

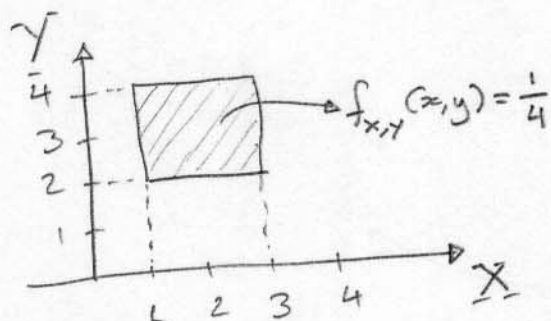
(a) $X \sim U[1, 3]$, επομένως $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

$Y \sim U[2, 4]$, επομένως $f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

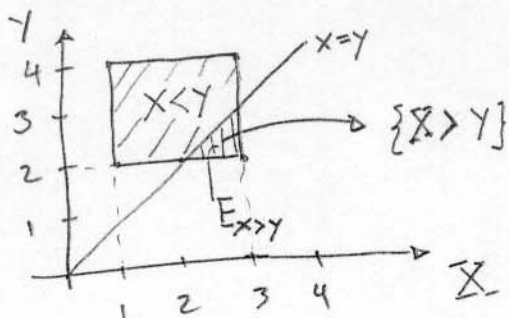
Καθώς οι X και Y είναι ανεξάρτητες,

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3 \text{ και } 2 \leq y \leq 4 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή, οι τ.τ. X και Y ακολουθούν και από κοινά ομοιόμορφη β.π.π. στο διάστημα $\{1 \leq x \leq 3, 2 \leq y \leq 4\}$ με γραμμική παράσταση



(p) Προφανώς, $P(A) = P(X < Y)$. Από το σχήμα είναι εμφανές ότι $P(X < Y) = 1 - P(X > Y)$



$$1 - E_{X>Y} \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{8}.$$

(8) Το παιχνίδι των αγώνων, έστω W , που κερδίζει ο Χρυστός σε 10 προσπάθειες ακολουθεί Διωνυμική κατανομή: $W \sim \Delta(n=10, p=\frac{7}{8})$

Συνεπώς, $P(W=7) = \binom{10}{7} \left(\frac{7}{8}\right)^7 \left(\frac{1}{8}\right)^3.$

ΘΕΜΑ 3:

$$(a) \quad (i) \quad P(X \leq 5) = P\left(\frac{X-10}{4} \leq \frac{5-10}{4}\right) = \Phi\left(-\frac{5}{4}\right) = 1 - \Phi(1.25).$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad P(X^2 \geq 400) &= P(X \geq 20 \cup X \leq -20) = P(X \geq 20) + P(X \leq -20) \\ &= 1 - P(X < 20) + P(X \leq -20) \\ &= 1 - P\left(\frac{X-10}{4} < \frac{20-10}{4}\right) + P\left(\frac{X-10}{4} \leq \frac{-20-10}{4}\right) \\ &= 1 - \Phi(2.5) + \Phi(-7.5) = 2 - \Phi(2.5) - \Phi(7.5). \end{aligned}$$

$$(iii) \quad P(X=2) = 0 \quad \text{καθώς η τ.κ. } X \text{ είναι συνεχής.}$$

(β) Γνωρίζουμε ότι αν η τ.κ. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ τότε η τ.κ.

$Y = aX + b$ είναι επίσης κανονική με $Y \sim N(a\mu_1 + b, a^2\sigma_1^2)$.

Θέλουμε να έχουμε $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Συνεπώς,

$$\left. \begin{aligned} a\mu_1 + b &= \mu_2 \\ a^2\sigma_1^2 &= \sigma_2^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \mu_1 + b &= \mu_2 \\ a &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= \mu_2 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \mu_1 \\ a &= \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι:

$$Y = \frac{X - \mu_1}{\sigma_1} \cdot \sigma_2 + \mu_2.$$

(γ) Για τη νέα κανονική τ.κ. Z έχουμε:

$$\mu_Z = E[Z] = E[X+2Y] = E[X] + 2E[Y] = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

$$\sigma_Z^2 = E[Z^2] - (E[Z])^2 = E[Z^2] = E[(X+2Y)^2] = E[X^2 + 4Y^2 + 4XY]$$

$$= E[X^2] + 4E[Y^2] + 4E[XY]$$

$$= \sigma_X^2 + \mu_X^2 + 4(\sigma_Y^2 + \mu_Y^2) + 4(\text{cov}(X,Y) + \mu_X\mu_Y)$$

$$= 5 + 0 + 4(2 + 0) + 4(-1 + 0 \cdot 0) = 9.$$

• Συνεπώς, $Z \sim N(0, 9)$. Επομένως,

(4)

$$P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - P\left(\frac{Z-0}{3} \leq \frac{1-0}{3}\right) \\ = 1 - \Phi(1/3).$$

ΘΕΜΑ 4ο

(a) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$X \sim \exp(\lambda), \quad f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \\ Y \sim \exp(\lambda), \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y \geq 0, \quad F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

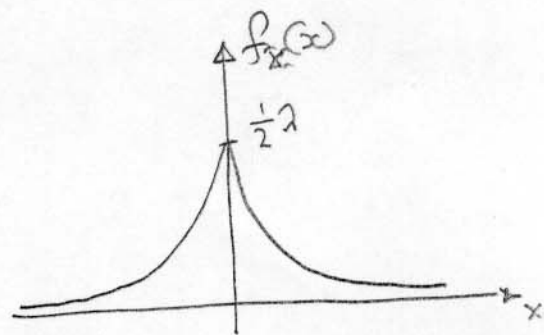
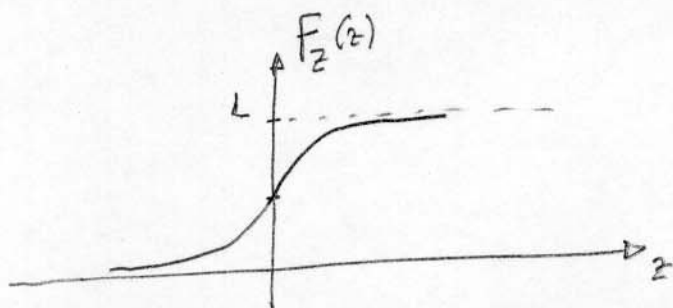
Εφαρμόζοντας το ΘΟΠ, έχουμε ότι:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Z \leq z | W=1) \cdot P(W=1) + P(Z \leq z | W=0) \cdot P(W=0) \\ = P(X \leq z) \cdot \frac{1}{2} + P(-Y \leq z) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \begin{cases} 0 \cdot \frac{1}{2} + P(Y \geq -z) \cdot \frac{1}{2}, & z < 0 \\ P(X \leq z) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - P(Y \leq -z)), & z < 0 \\ \frac{1}{2} P(X \leq z) + \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases}$$

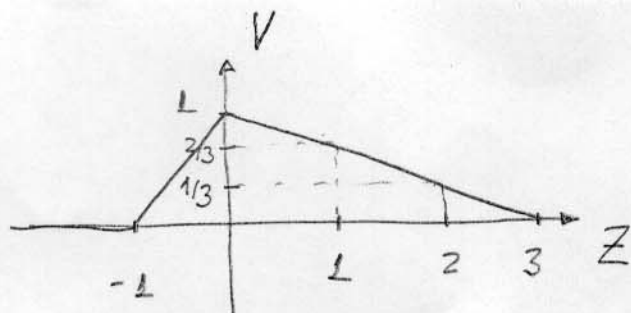
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - F_Y(-z)), & z < 0 \\ \frac{1}{2} F_X(z) + \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - (1 - e^{-\lambda(-z)})), & z < 0 \\ \frac{1}{2} (1 - e^{-\lambda z}) + \frac{1}{2}, & z \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda z}, & z < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases}$$



Παραγωγίζοντας ως προς z : $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda z}, & z < 0 \\ \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda |z|}$: Δηλ. η
Εκθετική
Γ.Π.Π.

(p-i)



(5)

$$\begin{aligned}
 (p\text{-}ii) \quad P(V=0) &= P(Z \leq -1 \cup Z > 3) = P(Z \leq -1) + P(Z > 3) \\
 &= P(Z \leq -1) + 1 - P(Z \leq 3) \\
 &= F_Z(-1) + 1 - F_Z(3) = \frac{1}{2} e^{-\lambda} + 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda 3}\right)
 \end{aligned}$$

$$\therefore P(V=0) = \frac{1}{2} e^{-\lambda} + \frac{1}{2} e^{-3\lambda}.$$

Επομένως, η V αντιστοιχεί στη.

(p-iii) Είναι προφανές από το σχήμα ότι $0 \leq V \leq 1$.

• Για $v < 0$, $F_V(v) = 0$

• Για $v \geq 1$, $F_V(v) = 1$

• Για $0 \leq v < 1$, $F_V(v) = P(V \leq v) =$

$$= P(Z \leq v-1 \cup Z \geq 3(1-v)) = P(Z \leq v-1) + P(Z \geq 3(1-v))$$

$$= F_Z(v-1) + 1 - F_Z(3(1-v))$$

$$= \frac{1}{2} e^{\lambda(v-1)} + 1 - \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda(3(1-v))}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\lambda(1-v)} + \frac{1}{2} e^{-3\lambda(1-v)}$$

$$\therefore F_V(v) = \begin{cases} 0 & , v < 0 \\ \frac{1}{2} e^{-\lambda(1-v)} + \frac{1}{2} e^{-3\lambda(1-v)} & , 0 \leq v < 1 \\ 1 & , v \geq 1 \end{cases}$$

$$\therefore f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda(1-v)} + \frac{3}{2} \lambda e^{-3\lambda(1-v)} & , 0 \leq v \leq 1 \\ \left(\frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda} + \frac{1}{2} e^{-3\lambda}\right) \delta(v) & , v = 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$