

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έβδομης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/12/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 17/12/2008

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές(II).

Άσκηση 1.

(α)

$$P(\text{Ο Χρήστος κερδίζει}) = 1 - P(\text{Ο Χρήστος χάνει}) = 1 - P(X > Y) = 1 - \int_2^3 \int_2^x \frac{1}{4} dy dx = \frac{7}{8}$$

(β) Το πλήθος των αγώνων που κερδίζει ο Χρήστος στο σύνολο 10 αγώνων είναι μια απλή διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο 10 και με πιθανότητα αυτή που υπολογίστηκε στο ερώτημα (α). Έχουμε λοιπόν:

$$P(\text{Ο Χρήστος νικά σε 7 από τους 10 αγώνες}) = \binom{10}{7} \left(\frac{7}{8}\right)^7 \left(\frac{1}{8}\right)^3$$

(γ) Εφόσον ο αγώνας είναι αγώνας ταχύτητας, ο νικητής έχει τον μικρότερό χρόνο. Άρα η κατανομή του χρόνου για τον νικητή του αγώνα είναι: $W = \min\{X, Y\}$. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο, χρειάζεται αρχικά να υπολογίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της W :

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(\min(X, Y) \leq w) \\ &= 1 - P(\min(X, Y) > w) \\ &= 1 - P(X > w, Y > w) \\ &= \begin{cases} 0 & , w \leq 1, \\ 1 - 1/2(3 - w) & , 1 < w \leq 2 \\ 1 - 1/4(12 - 7w + w^2) & , 2 < w \leq 3 \\ 1 & , w > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση πιθανότητας της W μπορεί να παραχθεί από την αθροιστική συνάρτηση κατανομή της:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 1 < x \leq 2, \\ \frac{7}{4} - \frac{w}{2} & , 2 < w \leq 3 \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 2.

(α)

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{(0.5)(0.5)}{0.75} = \frac{1}{3}$$

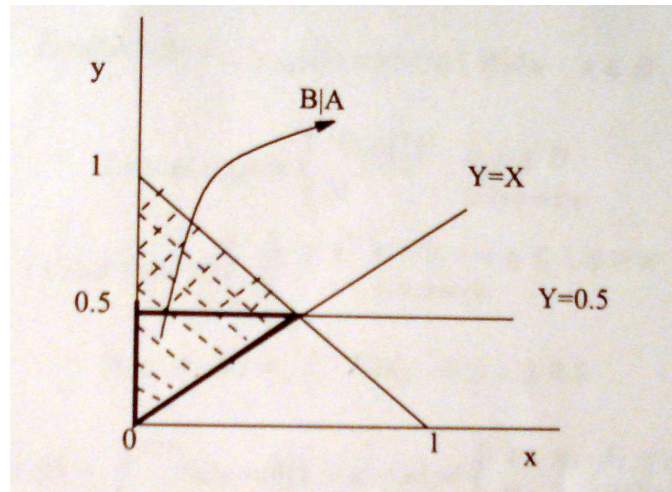
Ένας άλλος τρόπος για να προσεγγίσουμε είναι να συνειδητοποιήσουμε ότι στον κόσμο του A , το $f_{X,Y}(x, y)$ παραμένει ομοιόμορφη κατανομή και από την εικόνα 1 παρατηρούμε ότι $(B|A)$ είναι $\frac{1}{3}$ του (A) .

(β) Έχουμε ότι:

$$f_{X|Y}(x|0.5) = \frac{f_{X,Y}(x, 0.5)}{f_Y(0.5)}$$

με:

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^{1-y} 2 dx = 2 - 2y$$



Σχήμα 1: Άσκηση 2, ερώτημα (α).

Για $y = 0.5$ η $f_Y(y)$ γίνεται:

$$f_Y(0.5) = 2 - 2(0.5) = 1$$

Άρα:

$$f_{X|Y}(x|0.5) = \begin{cases} 2 & , 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Για την δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. X δεδομένου του $Y = 0.5$ έχουμε:

$$E[X|Y = 0.5] = 0.25$$

$$\text{var}(X|Y = 0.5) = E[(X - E[X|Y = 0.5])^2] = \int_0^{0.5} f_{X|Y}(x|0.5)(x - 0.25)^2 dx = \int_0^{0.5} 2(x - 0.25)^2 dx = \frac{1}{48}$$

(γ) Έχουμε :

$$f_{X|B}(x) = \int_{Y \in B} f_{X,Y|B}(x,y) dy, \quad x \in B$$

Με

$$f_{X,Y|B}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{P(B)} & , x, y \in B, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας δεδομένου του B είναι:

$$f_{X,Y|B}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{0.5} = 4 & , x > 0, x + y \leq 1, y > x, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα:

$$f_{X|B}(x) = \int_x^{1-x} 4 dy, \quad 0 \leq x \leq 0.5$$

Συνεπώς

$$f_{X|B}(x|B) = \int_x^{1-x} 4 dy = 4(1 - x - y) = \begin{cases} 4 - 8x & , 0 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(δ)

$$E[XY] = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} xy 2 dx dy = \int_0^1 (y - 2y^2 + y^3) dy = \frac{1}{12}$$

(ε) Εφόσον $Z = \frac{Y}{X}$ έχουμε ότι:

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \left(\frac{z}{1+z} \right) (1)(2)(0.5)$$

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \frac{d}{dz} F_Z(z) \\
 &= \frac{-z}{(1+z)^2} + \frac{1}{z+1} \\
 &= \frac{1}{(1+z)^2}
 \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1+z)^2} & , 0 \leq z, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 3.

(α) Εφόσον οι X και Y είναι ανεξάρτητες, η από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων είναι:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x, y \leq 1, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ορίζουμε το γεγονός R_1 όταν $X \leq 0.25$ και το γεγονός R_2 όταν $Y \leq 0.25$. Ένα μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15 λεπτών από τον B , αν ο A έστειλε δυο μηνύματα και τουλάχιστον ένα από τα R_1 και R_2 συνέβει. Η ζητούμενη πιθανότητα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι η εξής:

$$P(R_1 \cup R_2) = P(R_1) + P(R_2) - P(R_1 \cap R_2)$$

Υπολογίζουμε κάθε όρο ξεχωριστά:

$$P(R_1) = P\left(X \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P(R_2) = P\left(Y \leq \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Εφόσον τα X και Y είναι ανεξάρτητα:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$1/4 + 1/4 - 1/16 = 7/16$$

Να σημειωθεί ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι η συνολική γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα 2.

(β) Έστω B το γεγονός ότι ένα μήνυμα λαμβάνεται εντός 15 λεπτών, αλλά δεν επιβεβαιώνεται. Τότε:

$$B = R_1 \cap R_2^c \cap R_1^c \cap R_2$$

Παρατηρήστε ότι αυτή είναι η ένωση δυο ξένων μεταξύ τους γεγονότων, οπότε:

$$P(B) = P(R_1 \cap R_2^c) + P(R_1^c \cap R_2)$$

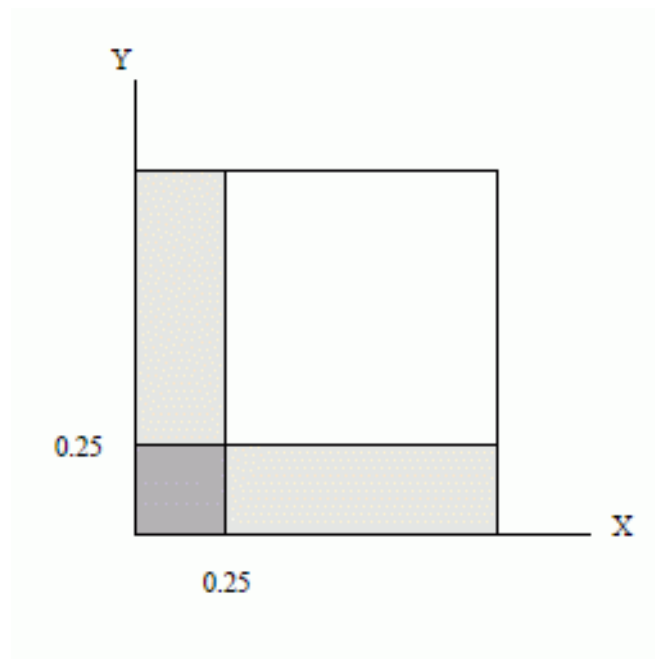
και η ανεξαρτησία των R_1 και R_2 ακολουθεί την απλοποίηση

$$P(B) = P(R_1) \cdot P(R_2^c) + P(R_1^c) \cdot P(R_2)$$

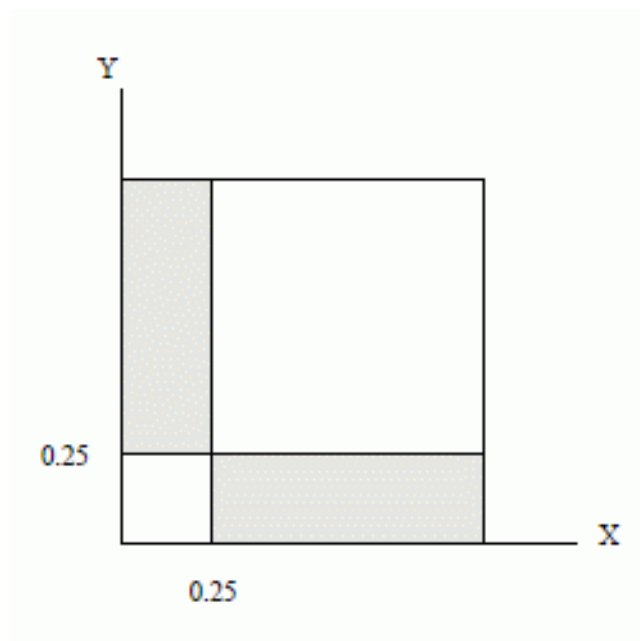
Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$(1/4)(3/4) + (3/4)(1/4) = \frac{3}{8}$$

Να σημειωθεί ότι η ζητούμενη πιθανότητα είναι η συνολική γραμμοσκιασμένη περιοχή στο σχήμα 3.



Σχήμα 2: Άσκηση 3, ερώτημα α.



Σχήμα 3: Άσκηση 3, ερώτημα β.

(γ) Επαλήθευση ενός μηνύματος συμβαίνει όταν και το δεύτερο μήνυμα λαμβάνεται από τον σταθμό B, άρα για $t \in [0, 1]$ έχουμε:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(X \leq t \cap Y \leq t)$$

εφόσον τα X και Y είναι ανεξάρτητα, μπορούμε να το γράψουμε και ως εξής:

$$P(X \leq t)P(Y \leq t) = t \times t = t^2$$

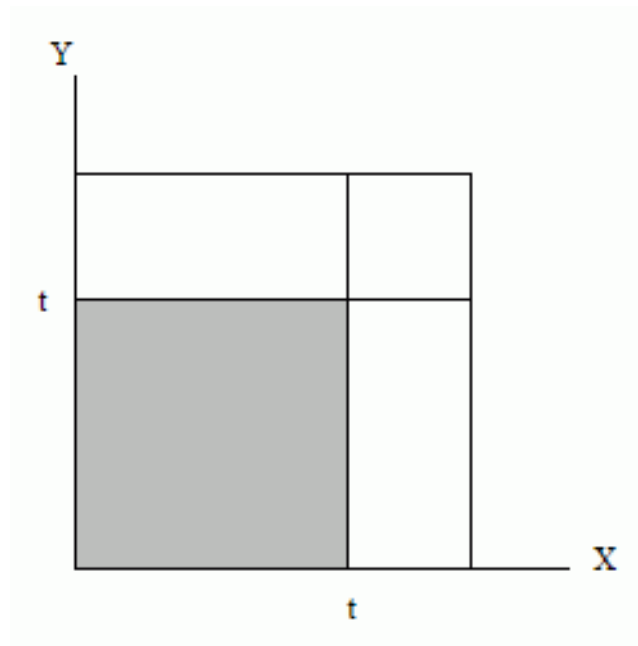
Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & , -\infty < t \leq 0, \\ t^2 & , 0 < t \leq 1 \\ 1 & , 1 < t < \infty \end{cases}$$

Οπότε:

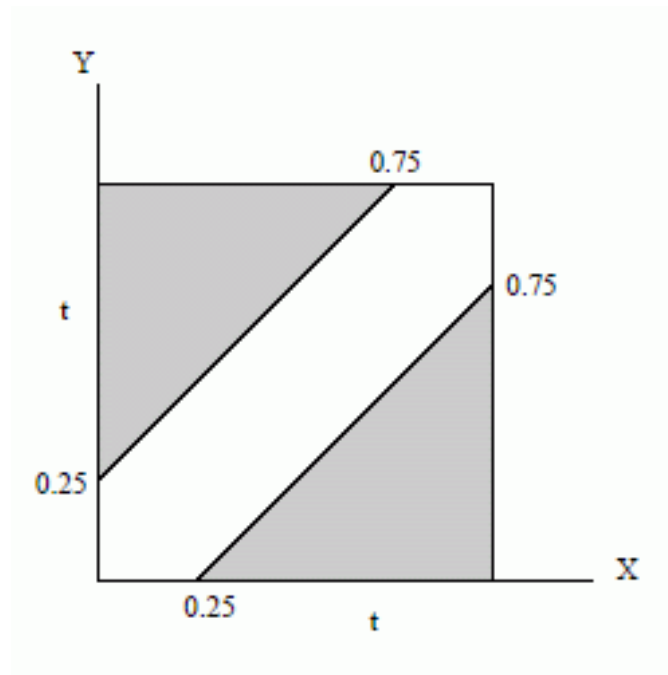
$$f_T(t) = \begin{cases} 2t & , 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Στο σχήμα 4 η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια είναι η ζητούμενη πιθανότητα.



Σχήμα 4: Άσκηση 3, ερώτημα (γ).

(δ) Το γεγονός ότι ο υπάλληλος δεν θα βρίσκεται παρών για να λάβει την επαληθευση είναι $\{|X - Y| > \frac{1}{4}\}$. Μπορούμε να εξάγουμε την ζητούμενη πιθανότητα εύκολα από το σχήμα 5



Σχήμα 5: Άσκηση 3, ερώτημα (δ).

(ε) Γνωρίζουμε ότι η στρατηγική από το ερώτημα (δ) έχει πιθανότητα επαλήθευσης $9/16$. Η άλλη στρατηγική να στέλνουμε τον υπάλληλο σπίτι του μετά από 45 λεπτά έχει πιθανότητα επιβεβαίωσης $P(T \leq \frac{3}{4}) = \frac{9}{16}$, υπολογίζοντας την έκφραση στο ερώτημα (γ). Συνεπώς, και οι δυο στρατηγικές είναι εξίσου αποτελεσματικές.

Άσκηση 4.

Για $x < 0$, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι 0, και για $x > 2$ είναι 1. Για τιμές του x μεταξύ 0 και 2, μπορούμε να βρούμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής χρησιμοποιώντας τον ολικό θεώρημα πιθανοτήτων. Υποθέτουμε χωρίς να χάνεται η γενίκευση, ότι η Μαρία στοιχειματίζει κεφαλή. Τότε:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P(X \leq x, H) + P(X \leq x, T) \\ &= 1/2(P(X \leq x|H) + P(X \leq x|T)) \\ &= 1/2(P(U \leq x-1) + P(U \geq x-1)) \\ &= \begin{cases} 1/2(1 - (1-x)) & , 0 \leq x \leq 1, \\ 1/2(x-1) & , 1 < x \leq 2 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \text{ για } 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Οπότε, $X \sim U[0, 2]$, κατανέμεται ομοιόμορφα ανάμεσα στο 0 και 2.

Άσκηση 5.

(α) Αν $k < 0$, τότε $p_Y(k) = 0$. Αν $k \geq 0$, τότε:

$$\begin{aligned} p_Y(k) &= P(Y = k) = P(k \leq X < k+1) \\ &= F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k})e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \\ &= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, Y η κβαντισμένη της εκθετικής τυχαίας μεταβλητής X , είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή ($e^{-\lambda}$), όπου $e^{-\lambda}$ είναι η πιθανότητα επιτυχίας μέσα σε μια μονάδα χρόνου.

(β) Εφόσον για μια συνεχής τυχαία μεταβλητή η πιθανότητα για οποιοδήποτε σημείο είναι 0,

$$P(X < x) = P(X \leq x) = F_X(x)$$

Τώρα, εφόσον:

$$0 \leq Z = X - Y = X - \lfloor X \rfloor < 1$$

το σφάλμα κβαντισμού της συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $f_Z(z)$ είναι 0 αν $z < 0$ ή $z \geq 1$. Αν $0 \leq z < 1$, τότε:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(0 \leq Z \leq z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leq X \leq k+z) \\ &= (1 - e^{-\lambda z}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda k} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}} \end{aligned}$$

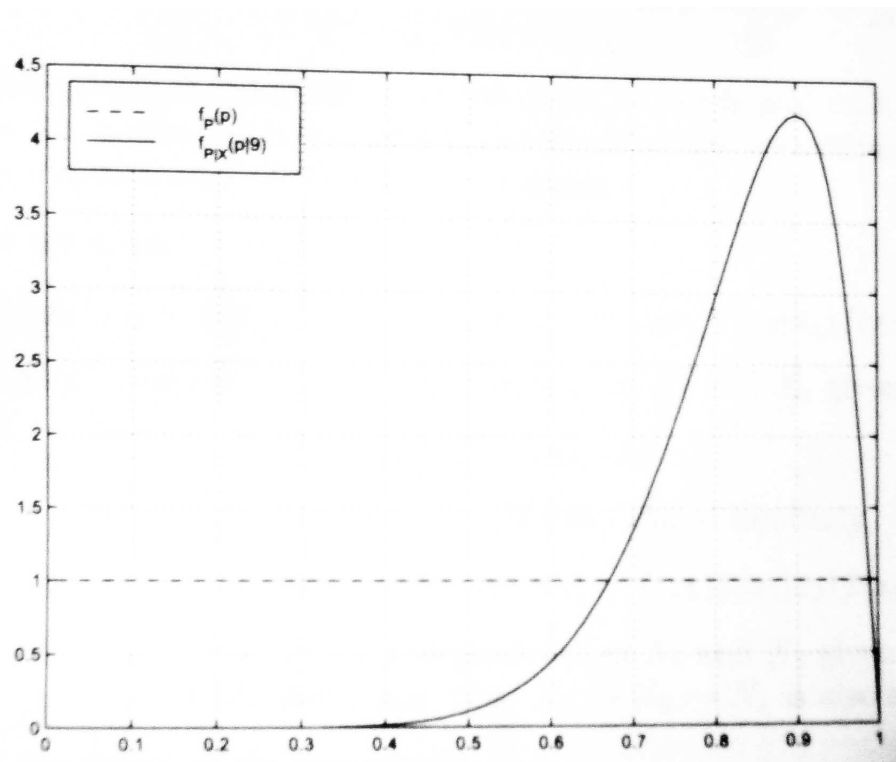
Συνεπώς:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda e^{-\lambda z}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad 0 \leq z < 1$$

Άσκηση 6.

(α) Για να υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της P , εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes για μείξη τυχαίων μεταβλητών:

$$f_{P|X}(p|x) = \frac{p_{X|P}(x|p)}{\int_0^1 p_{X|P}(x|p) f_P(p) dp} f_P(p)$$



Σχήμα 6: Άσκηση 6

Τώρα δεδομένου ότι $X = 9$, έχουμε αν $0 \leq p \leq 1$ τότε

$$f_{P|X}(p|9) = \frac{p^9(1-p)}{\int_0^1 p^9(1-p)dp} = \frac{p^9(1-p)}{1/110} = 110p^9(1-p)$$

Το σχήμα 6 δείχνει τη μη δεσμευμένη και δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της P . Δεδομένου της πληροφορίας ότι 10 ρίψεις έφεραν ως αποτέλεσμα 9 κεφάλες, η συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας ολισθαίνει προς την τιμή 0.9. Στην πραγματικότητα, η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας είναι $p = 0.9$. Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι $5/6$, άρα η ελάχιστη μέση τετραγωνική εκτίμηση της P δεδομένου $X = 9$ είναι $5/6 = 8.333 < 0.9$.

(β) Έστω ότι το αποτέλεσμα της i -οστής ρίψης είναι μια τυχαία μεταβλητή Y_i , όπου $Y_i = 0$ αντιστοιχεί σε κεφαλή και $Y_i = 1$ αντιστοιχεί σε γράμματα. Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της Y_i δεδομένου του $P = p$ είναι

$$P_{Y_i|P}(y_i|p) = \begin{cases} p & , y_i = 0, \\ 1-p & , y_i = 1 \end{cases}$$

Οι ρίψεις του νομίσματος είναι ανεξάρτητες δεδομένου της πιθανότητας, άρα:

$$p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(y_1, \dots, y_{10}|p) = p_{Y_1|P}(y_1|p)p_{Y_2|P}(y_2|p) \dots p_{Y_{10}|P}(y_{10}|p)$$

Για να είναι τα αποτελέσματα των ρίψεων 9 κεφαλές που ακολουθεί μια φορά γράμματα, τότε:

$$p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(H, H, \dots, H, T|p) = p^9(1-p)$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes για να υπολογίσουμε την δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της P , έχουμε

$$f_{P|Y_1, \dots, Y_{10}}(p|H, H, \dots, H, T) = \frac{p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(H, H, \dots, H, T|p)}{p_{Y_1, \dots, Y_{10}}(H, H, \dots, H, T)} f_P(p)$$

. Η έκφραση αυτή είναι μηδέν όταν $p < 0$ ή $p > 1$ εφόσον η *a priori* συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας $f_P(p)$ είναι μηδέν. Για $0 \leq p \leq 1$

$$f_{P|Y_1, \dots, Y_{10}}(p|H, H, \dots, H, T) = \frac{p^9(1-p)}{\int_0^1 p_{Y_1, \dots, Y_{10}|P}(H, H, \dots, H, T|p) f_P(p) dp}$$

$$= \frac{p^9(1-p)}{\int_0^1 p^9(1-p)dp} = 100p^9(1-p)$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από την σειρά των κεφαλών και γραμμάτων. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες και κατ' επέκταση η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της Y_i δεδομένου του P είναι συνάρτηση μόνο για το πλήθος των κεφαλών.

Άσκηση 7.

Για να εκφράσουμε τον $\rho_{X,2Y}$ σε σχέση με τον $\rho_{X,Y}$, προχωράμε ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} COV(X, 2Y) &= E((X - EX)(2Y - E2Y)) \\ &= 2E((X - EX)(Y - EY)) = 2COV(X, Y) \\ \sigma_{2Y} &= \sqrt{E(2Y - E2Y)^2} = \sqrt{4E(Y - EY)^2} = 2\sigma_Y \\ \rho_{X,2Y} &= \frac{COV(X, 2Y)}{\sigma_X \sigma_{2Y}} = \frac{2COV(X, Y)}{\sigma_X 2\sigma_Y} = \frac{COV(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \rho_{X,Y} \end{aligned}$$

Εν γένει, ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των $aX + b$ και $cY + d$ είναι $\rho_{X,Y}$ αν $a > 0$, $b > 0$ και $c > 0$, $d > 0$.

Άσκηση 8.

(α) Αφού $Z = 2(X + Y)(X - Y) = 2(X^2 - Y^2)$, θα έχουμε:

$$E[Z] = 2(E[X^2] - E[Y^2]) = 2(Var(X) - Var(Y) + E^2[X] - E^2[Y]) = -40$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Cov(T, U) &= Cov(2X + Y, 2X - Y) \\ &= 4Cov(X, X) - 2Cov(X, Y) + 2Cov(Y, X) - Cov(Y, Y) \\ &= 4Var(X) - Var(Y) = 7 \end{aligned}$$

(γ) Είναι:

$$\begin{aligned} E[W] &= E[3X + Y + 2] = 3E[X] + E[Y] + 2 = 9 \\ Var(W) &= Var(3X + Y + 2) = 9Var(X) + Var(Y) + 6Cov(X, Y) = 48.6 \end{aligned}$$

$$\text{όπου } Cov(X, Y) = \rho\sqrt{Var(X)Var(Y)} = 3.6.$$

Άσκηση 9.

Το σημαντικό σημείο είναι να παρατηρήσουμε ότι οι $X_1, X_2, \dots$ είναι τυχαίες ανεξάρτητες μεταβλητές, και επομένως οι Y_n και Y_{n+k} είναι επίσης ανεξάρτητες αν $k \geq 3$. Άρα, $Cov(Y_n, Y_{n+k}) = 0$ αν $k \geq 3$. Τώρα για $k = 0$ έχουμε ότι: $Cov(Y_n, Y_n) = Var(Y_n) = Var(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}) = Var(X_n) + Var(X_{n+1}) + Var(X_{n+2}) = 3\sigma^2$ όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανεξαρτησία των X_n, X_{n+1}, X_{n+2} ακόμη μια φορά. Για $k = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} Cov(Y_n, Y_{n+1}) &= Cov(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) \\ &= Cov(X_n, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) + Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) \\ &= 0 + Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2}) + Cov(X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+3}) \\ &= Var(X_{n+1} + X_{n+2}) + 0 = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τη διγραμμικότητα της συνάρτησης γινομένου απόκλισης συν τη ανεξαρτησία των X_n, X_{n+1}, X_{n+2} . Τελικά, για $k = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} Cov(Y_n, Y_{n+2}) &= Cov(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}) \\ &= Cov(X_n + X_{n+1}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}) + Cov(X_{n+2}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}) \\ &= 0 + Cov(X_{n+2}, X_{n+2}) + Cov(X_{n+2}, X_{n+3} + X_{n+4}) \\ &= Var(X_{n+2}) + 0 = \sigma^2 \end{aligned}$$

όπου η λογική είναι παρόμοια με αυτή της περίπτωσης $k = 1$. Περιληπτικά, έχουμε ότι $Cov(Y_n, Y_{n+k}) = (3 - k)\sigma^2$ για $k = 0, 1, 2$ και $Cov(Y_n, Y_{n+k}) = 0$ για $k \geq 3$.