ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έβδομη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 3/12/2008 Ημερομηνία Παράδοσης: 17/12/2008

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (ΙΙ).

Άσκηση 1. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας συναγωνίζονται σε έναν αγώνα ταχύτητας. Οι χρόνοι του Χρήστου και του Ανδρέα μοντελοποιούνται σύμφωνα με τις τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) X and Y, αντίστοιχα, οι οποίες ακολουθούν τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{αν } 1 < x < 3, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.5 & \text{αν } 2 < y < 4, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος κερδίζει τον αγώνα.
(β) Υπολογίστε ότι ο Χρήστος κερδίζει ακριβώς 7 στους 10 αγώνες. Υποθέστε ότι όλοι οι αγώνες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητοι.
(γ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της τ.μ. W, που ορίζεται ως ο χρόνος του νικητή ενός αγώνα. Πρώτα υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της W.

Άσκηση 2. Οι τ.μ. X και Y έχουν από κοινού σ.π.π.:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{αν } x > 0 \text{ και } y > 0 \text{ και } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

Ονομάζουμε A το γεγονός $\{Y \leq 0.5\}$ και B το γεγονός $\{Y > X\}$.

(α) Υπολογίστε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(B|A)$.
(β) Υπολογίστε την $f_{X|Y}(x|0.5)$. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της τ.μ. X, δεδομένου του $Y = 0.5$.
(γ) Υπολογίστε την $f_{X|B}(x)$.
(δ) Υπολογίστε την $E[XY]$.
(ε) Υπολογίστε τη σ.π.π. της τ.μ. $Z = \frac{Y}{X}$.

Άσκηση 3. Δύο σταθμοί A και B συνδέονται μεταξύ τους με δύο *παράλληλα* κανάλια επικοινωνίας 1 και 2. Στέλνουμε συγχρόνως μέσω και των δύο καναλιών ένα μήνυμα από το σταθμό A στο σταθμό B. Οι τ.μ. X και Y μοντελοποιούν την χρονική καθυστέρηση (σε ώρες) παραλαβής του μηνύματος μέσω των καναλιών 1 και 2, αντίστοιχα. Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα $[0, 1]$. Ένα μήνυμα θεωρείται ότι έχει ληφθεί όταν φτάνει στο σταθμό B μέσω οποιουδήποτε από τα δύο κανάλια, ενώ θεωρείται ότι έχει επαληθευθεί όταν φτάνει στο σταθμό B μέσω και των δύο καναλιών.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι το μήνυμα έχει ληφθεί αλλά όχι επαληθευθεί εντός 15 λεπτών της ώρας μετά την αποστολή του;
(γ) Έστω η τ.μ. T η οποία μοντελοποιεί το χρόνο (σε ώρες) από την αποστολή του μηνύματος από το σταθμό Α μέχρι την επαλήθευσή του στο σταθμό Β. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τ.μ. T και κατόπιν τη σ.π.π. της T.
(δ) Αν ο υπάλληλος του σταθμού Β φύγει για ένα 15λεπτο διάλειμμα αμέσως μετά τη λήψη του μηνύματος, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα βρίσκεται παρών στο πόστο του για επαλήθευση;
(ε) Η διεύθυνση θέλει να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα ο υπάλληλος να είναι παρών και για την λήψη αλλά και για την επαλήθευση του μηνύματος. Είναι προτιμότερο να τον αφήσουν να κάνει το διάλειμμά του όπως περιγράφεται στο (δ) ή να τον αφήσουν να φύγει σπίτι του 45 λεπτά μετά την αποστολή του μηνύματος;

Άσκηση 4. Η Μαρία μπαίνει σε ένα καζίνο με μία μονάδα κεφαλαίου στην τσέπη της. Κοιτάζει το ρολόι της για να παράξει ένα τυχαίο αριθμό ομοιόμορφα κατανεμημένο μεταξύ 0 και 1 ($U \sim \text{Uniform}[0,\ 1]$), και κατόπιν ποντάρει το ποσό U στο ρίξιμο ενός δίκαιου κέρματος. Επομένως, μετά τη ρίψη του κέρματος το κεφάλαιό της, X, είναι:

$$X = \begin{cases} 1+U & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 1-U & \text{με πιθανότητα } 0.5. \end{cases}$$

Βρείτε την α.σ.κ. και την σ.π.π. της τ.μ. X.

Άσκηση 5. (Κβάντιση) Έστω $X \sim Exp(\lambda)$ μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο λ. Έστω $Y = \lfloor X \rfloor$ το ακέραιο μέρος της X. Δηλαδή, αν $k \leq X < k+1$ τότε $Y = k$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της Y.
(β) Ορίστε το σφάλμα κβάντισης ως $Z = X - \lfloor X \rfloor$. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Z.

Άσκηση 6. (Ο κανόνας του Bayes για μία διακριτή και μία συνεχή τ.μ.) Σας δίδεται ένα κέρμα για το οποίο δεν γνωρίζετε το P (πιθανότητα να έρθει κεφαλή). Αλλά σας δίδεται ότι το P είναι τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,\ 1]$, $P \sim U[0,1]$. Για να εκτιμήσετε καλύτερα την πιθανότητα κεφαλής για το κέρμα, εκτελείτε ένα πείραμα, ρίχνοντας το κέρμα 10 φορές. Έστω ότι Y_i, ($i = 1, 2, \ldots, 10$), ισούται με 1 αν το αποτέλεσμα της i-στής ρίψης είναι κεφαλή και ισούται με 0 αλλιώς. Έστω X ο αριθμός των κεφαλών που προκύπτουν στις 10 ρίψεις. Προφανώς, $X|\{P = p\} \sim \text{Bionomial}(10, p)$.

(α) Υποθέτοντας ότι $X = 9$, υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της εκ των υστέρων συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του P, $f_{P|X}(p|9)$. Σχολιάστε το αποτέλεσμα.
(β) Υποθέτοντας και πάλι ότι $X = 9$, δείξτε ότι

$$f_{P|Y_1,Y_2,\ldots,Y_{10}}(p|y_1, y_2, \ldots, y_{10}) = f_{P|X}(p|9),$$

δηλαδή, η δεσμευμένη σ.π.π. του P δεδομένων των $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{10}$ εξαρτάται μόνο από το συνολικό πλήθος των κεφαλών X.

Άσκηση 7. Έστω δύο τ.μ. X και Y με συντελεστή ετεροσυσχέτισης $\rho_{X,Y}$. Ποιος είναι ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των τ.μ. X και $2Y$;

Άσκηση 8. Έστω X και Y τ.μ. με $E[X] = 1$, $E[Y] = 4$, $var(X) = 4$, $var(Y) = 9$, και συντελεστή συσχέτισης $\rho_{X,Y} = 0.1$.

(α) Αν $Z = 2(X + Y)(X - Y)$, βρείτε την $E[Z]$.
(β) Αν $T = 2X + Y$ και $U = 2X - Y$, βρείτε την συνδιασπορά των τ.μ. T και U, $cov(T, U)$.
(γ) Αν $W = 3X + Y + 2$, βρείτε τις $E[W]$ και $var(W)$.

Άσκηση 9. Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία αριθμήσιμα άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων, όμοια κατανεμημένων τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Ορίζουμε τις τ.μ. $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$, για $n = 1, 2, \ldots$. Για κάθε $k \geq 0$, υπολογίστε τις συνδιασπορές $cov(Y_n, Y_{n+k})$.