

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Έκτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/11/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 01/12/2008

Άσκηση 1.

(α) Εφόσον:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 10a$$

Άρα η μόνη δυνατή τιμή για το a είναι 0.1.

(β) Εφόσον η $f_X(\cdot)$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε $E[X] = 0$. Επιπλέον:

$$\text{var}(X) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = 2 \int_0^{10} \frac{10-x}{100} x^2 dx = \frac{50}{3}$$

(γ) Ομοίως η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & , x < -10 \\ 0.005(x+10)^2 & , x \in [-10, 0], \\ 1 - 0.005(x-10)^2 & , x \in [0, 10], \\ 1 & , x > 10 \end{cases}$$

Άσκηση 2.

(α) $P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-) = 2/3 - 1/3 = 1/3$

(β) $P(X < 2) = F_X(2^-) = 1/3$

(γ) $P(\{X = 2\} \cup \{0.5 \leq X \leq 1.5\}) = P(X = 2) + F_X(1.5) - F_X(0.5) = 1/3 + 1/3 + 1/3(0.5)^2 = 7/12$

Άσκηση 3.

Η πιθανότητα για οποιοδήποτε γεγονός να συμβεί ισούται με το εμβαδόν κατώ από την σ.π.π.. Παρατηρήστε ότι $X^2 - 12X + 35 = (X - 5)(X - 7)$. Οπότε, $X^2 - 12X + 35 > 0$ αν και μόνο αν $\{X > 7\} \cup \{X < 5\}$. Εφόσον $X \in [2, 10]$:

$$\begin{aligned} P(X^2 - 12X + 35 > 0) &= P(\{X > 7\} \cup \{X < 5\} \cap \{2 \leq X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\} \cup \{7 < X \leq 10\}) \\ &= P(\{2 \leq X < 5\}) + P(\{7 < X \leq 10\}) \\ &= 1/8 \times 3 + 1/8 \times 3 = 0.75 \end{aligned}$$

Άσκηση 4.

(α) Η ζητούμενη πιθανότητα είναι να χρησιμοποιήσει ο Ανδρέας τον υπολογιστή πάνω από 15 λεπτά. Εφόσον $T \sim \text{Exp}(1/60)$ λεπτά είναι ο χρόνος που περνάει ο Ανδρέας στον υπολογιστή, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(T > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-1/4}$$

(β) Αν ο Χρήστος χάσει ακριβώς μια φορά να ελένξει τα emails του, τότε $15 \leq T < 45$. Αν χάσει ακριβώς 2 φορές να ελένξει τα emails του, τότε $45 \leq T < 75$. Γενικά, αν δεν ελένξει τα emails του n φορές τότε: $15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15$. Άρα:

$$P(\{15 + 30(n-1) \leq T < 30n + 15\}) = \int_{30n-15}^{30n+15} \frac{1}{60} e^{-t/60} dt = e^{-n/2} (e^{1/4} - e^{-1/4})$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα να χάσει 3 emails είναι $e^{-3/2}(e^{1/4} - e^{-1/4})$.

Άσκηση 5.

Έστω X η τυχαία μεταβλητή που ζητάμε, δηλαδή ο αριθμός των χρόνων φυλάκισης ενός κατηγορουμένου. Τότε $f_X(x) = 0.5f_1(x) + 0.5f_2(x)$, όπου:

$$f_1(x) \begin{cases} 1 & , x \in [1, 2] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η σ.π.π. για τις ποινές του πρώτου δικαστή και

$$f_2(x) \begin{cases} 1/3 & , x \in [0, 3] \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η σ.π.π. για τις ποινές του δεύτερου δικαστή. Παρατηρήστε ότι η τιμές της $f_X(x)$ στα σημεία $\{0, 1, 2, 3\}$ δεν έχουν σημασία, αφού αλλάζοντας τιμή της σ.π.π. σε ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων δεν επηρεάζεται η κατανομή πιθανοτήτων. Ομοίως, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι γραμμική συνάρτηση:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x/6 & , x \in [0, 1] \\ 1/6 + (2/3)(x - 1) & , x \in [1, 2] \\ 5/6 + (1/6)(x - 2) & , x \in [2, 3] \\ 1 & , x > 3 \end{cases}$$

Εφόσον το γράφημα της $f_X(x)$ είναι συμμετρικό σε σχέση με τον άξονα $x = 3/2$, τότε $E[X] = 3/2$. Τέλος, εφόσον:

$$E[X^2] = \frac{1}{6} \int_0^1 x^2 dx + \frac{3}{2} \int_1^2 x^2 dx + \frac{1}{6} \int_2^3 x^2 dx = \frac{8}{3},$$

τότε:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{5}{12}.$$

Άσκηση 6.

$$\begin{aligned} E[\text{Int}(X)] &= \int_0^\infty \text{Int}(x) e^{-x} dx = \sum_{N=0}^\infty N \int_0^1 e^{-(x+N)} dx \\ &= \sum_{N=1}^\infty N(e^{-N} - e^{-N-1}) = (1 - e^{-1}) \sum_{N=1}^\infty N e^{-N} \\ &= (1 - e^{-1}) \frac{e^{-2} + (1 - e^{-1})e^{-1}}{(1 - e^{-1})^2} \\ &= \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} \end{aligned}$$

Η δεύτερη από το τέλος ισότητα προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^\infty N e^{-N} &= \sum_{N=1}^\infty N e^{-Nx} \Big|_{x=0} = \left[\frac{d}{dx} \sum_{N=1}^\infty N e^{-N} \right]_{x=0} \\ &= \left[\frac{d}{dx} e^{-x} (1 - e^{-x}) \right]_{x=0} \\ &= \left[-\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} - \left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right)^2 \right]_{x=0} \end{aligned}$$

Άσκηση 7.

Εφ' όσον κάθε X_i έχει καθορισμένη και ανεξάρτητη πιθανότητα για $P(X_i > \frac{7}{2})$ για κάθε i , μπορούμε να παρακολουθήσουμε την ακολουθία ως το γνωστό γεωμετρικό waiting-time πρόβλημα. Μένει να βρούμε μονάχα την παράμετρο για την 'επιτυχία' της γεωμετρικής κατανομής, η οποία ορίζεται ως:

$$P\left(X_i > \frac{7}{2}\right) = \int_{x>7/2} f_X(x)dx = \int_{\frac{7}{2}}^4 \frac{1}{8}dx = \frac{1}{16}$$

Άρα ο αναμενόμενος αριθμός δοκιμών είναι 16.

Άσκηση 8.

Εξ' ορισμού η μέση τιμή είναι:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty px\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{-\infty}^0 (1-p)x\lambda e^{\lambda x}dx \\ &= p\lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx + (1-p)\lambda \int_{-\infty}^0 xe^{\lambda x}dx \\ &= p\lambda \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left(xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right) + (1-p)\lambda \frac{1}{\lambda} \left(xe^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x}dx\right) \\ &= p\lambda \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) + (1-p)\lambda \left(\frac{1}{\lambda}\right) \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}(2p-1) \end{aligned}$$

Εξ' ορισμού η διασπορά είναι:

$$var(X) = \int_0^\infty px^2\lambda e^{-\lambda x}dx + \int_{-\infty}^0 (1-p)x^2\lambda e^{\lambda x}dx - E[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}(2p-1)^2$$

Ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά: Έστω A το γεγονός έτσι ώστε $x > 0$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας η μέση τιμή είναι:

$$E[X] = P(A)E[X|A] + P(A^c)E[X|A^c] = p\left(\frac{1}{\lambda} + (1-p)\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right) = \frac{1}{\lambda}(2p-1)$$

Για την διασπορά θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = P(A)E[X^2|A] + P(A^c)E[X^2|A^c] - E[X]^2$$

Η τιμή της $E[X^2|A]$ μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$\begin{aligned} var(X|A) &= E[X^2|A] - E[X|A]^2 \\ \frac{1}{\lambda^2} &= E[X^2|A] - \frac{1}{\lambda^2} \\ E[X^2|A] &= \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Μπορούμε με παρόμοιο τρόπο να υπολογίσουμε το $E[X^2|A^c]$. Συνεπώς η διασπορά είναι:

$$\begin{aligned} var(X) &= P(A)E[X^2|A] + P(A^c)E[X^2|A^c] - E[X]^2 \\ &= p\frac{2}{\lambda^2} + (1-p)\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}(2p-1)^2 \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}(2p-1)^2 \end{aligned}$$