ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Έκτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/11/2008 Ημερομηνία Παράδοσης: 1/12/2008

Θέματα: Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές (I).

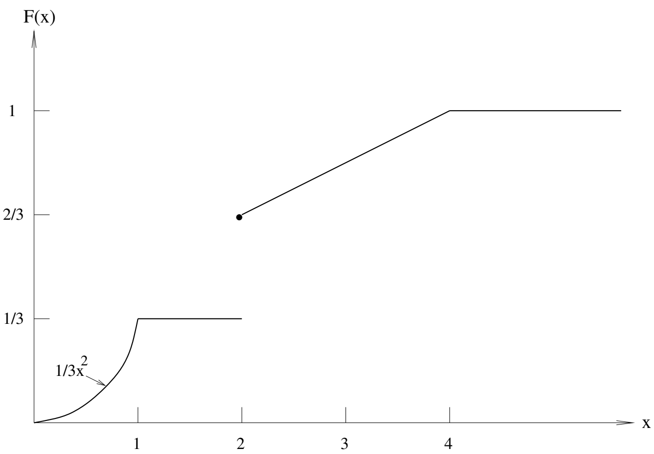
Άσκηση 1. Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.):

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-0.1|x|) & \text{για } -10 \le x \le 10, \\ 0 & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου a μία σταθερά.

(α) Υπολογίστε το a.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.
(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) $F_X(x)$ της X.

Άσκηση 2. Έστω η τυχαία μεταβλητή X της οποίας η αθροιστική συνάρτηση κατανομής φαίνεται στο σχήμα.



Υπολογίστε την πιθανότητα των ακόλουθων γεγονότων:
(α) $\{X = 2\}$.
(β) $\{X < 2\}$.
(γ) $\{X = 2\} \cup \{0.5 \le X \le 1.5\}$.
(δ) $\{X = 2\} \cup \{0.5 \le X \le 3\}$.

Άσκηση 3. Δίδεται η τ.μ. $X \sim U[2,\ 10]$, δηλαδή, η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[2,\ 10]$. Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $X^2 - 12X + 35 > 0$.

Άσκηση 4. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας μοιράζονται τον ίδιο υπολογιστή. Ο Χρήστος χρησιμοποιεί τον υπολογιστή για να ελέγξει το e-mail του κάθε 30 λέπτα, στις xx:15 και xx:45 κάθε ώρας. Στις 6:00 το απόγευμα ο Ανδρέας αποφασίζει να χρησιμοποιήσει τον υπολογιστή για μία εργασία του. Η εργασία θα πάρει ένα χρονικό διάστημα που μοντελοποείται από μία εκθετική τ.μ. T με παράμετρο $\lambda = 1/60$, δηλαδή $T \sim Exp(1/60)$ (σε λεπτά της ώρας). Ο Χρήστος δεν μπορεί να ελέγξει το e-mail του όσο ο Ανδρέας εργάζεται στον υπολογιστή.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει έναν ή περισσότερους προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ο Χρήστος θα χάσει ακριβώς τρεις προγραμματισμένους ελέγχους του e-mail του.

Άσκηση 5. Ένα δικαστήριο έχει δύο δικαστές. Ο πρώτος καταδικάζει τον κατηγούμενο σε X χρόνια φυλάκιση, όπου X είναι συνεχής ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[1,\ 2]$. Ο δεύτερος δικαστής καταδικάζει τον κατηγούμενο σε Y χρόνια φυλάκιση, όπου Y είναι επίσης συνεχής ομοιόμορφη τ.μ. στο διάστημα $[0,\ 3]$. Η ρίψη ενός δίκαιου κέρματος καθορίζει ποιος από τους δύο δικαστές θα δικάσει τον κατηγορούμενο. Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, αθροιστική συνάρτηση κατανομής, μέση τιμή και διασπορά των χρόνων φυλάκισης του κατηγορουμένου.

Άσκηση 6. (Κβάντιση) Ένας μετατροπέας αναλογικού σήματος σε ψηφιακό (A/D) μετασχηματίζει μία ακολουθία τιμών συνεχούς πλάτους σε μία ακολουθία τιμών διακριτού πλάτους. Για παράδειγμα, για τη διακριτοποίηση του πεδίου τιμών μίας εικόνας χρησιμοποιούνται συχνά 8 bits, ή $256 = 2^8$ στάθμες κβάντισης. Θεωρείστε τον κβαντιστή που βασίζεται στο μετασχηματισμό $\lfloor x \rfloor$, ο οποίος απεικονίζει τον αριθμό x με τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που είναι μικρότερος από ή ίσος με το x. Δηλαδή $\lfloor 3.85 \rfloor = 3$. Υποθέτοντας ότι το αρχικό αναλογικό σήμα X μοντελοποιείται ως μία εκθετική τ.μ. με παράμετρο $\lambda = 1$, υπολογίστε τη μέση τιμή του κβαντισμένου σήματος, $E[\lfloor X \rfloor]$.

Άσκηση 7. Έστω η τ.μ. X με σ.π.π.:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{αν } 1 \leq x < 2 \text{ ή } 3 \leq x < 4 \\ \frac{3}{4} & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η τ.μ. X_i συμβολίζει την πειραματική τιμή της τ.μ. X στη δοκιμή i. Όλες οι τ.μ. X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπολογίστε τη μέση τιμή του πλήθους των δοκιμών που απαιτούνται μέχρις ότου παρατηρηθεί πειραματική τιμή μεγαλύτερη από $\frac{7}{2}$.

Άσκηση 8. Έστω η "διπλή εκθετική" τ.μ. X με σ.π.π.:

$$f_X(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} & \text{αν } x \geq 0 \\ (1-p)\lambda e^{\lambda x} & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

όπου λ και p είναι σταθερές με $\lambda > 0$ και $p \in [0,\ 1]$. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.