

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 31/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 12/11/2008

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (II).

Άσκηση 1. Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο τριεδρα δίκαια ζάρια. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X ως το άθροισμα των ρίψεων των δύο ζαριών.

- (α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.), την μέση τιμή και τη διασπορά της X .
- (β) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π. της τ.μ. X^2 .

Άσκηση 2. Μία κάλπη περιέχει αρχικά μία κόκκινη και μία μπλε μπάλα. Σε κάθε στάδιο του πειράματος τύχης, μία μπάλα επιλέγεται τυχαία από την κάλπη και κατόπιν επανατοποθετείται στην κάλπη μαζί με ακόμα μία μπάλα του ίδιου χρώματος. Δηλαδή, αν την πρώτη φορά επιλέχθηκε η κόκκινη μπάλα, τότε αυτή επανατοποθετείται πίσω στην κάλπη μαζί με άλλη μία κόκκινη, ώστε στο τέλος του πρώτου σταδίου η κάλπη περιέχει 2 κόκκινες και 1 μπλε μπάλες. Ορίζουμε την τ.μ. X ως τον αύξοντα αριθμό της προσπάθειας κατά την οποία επιλέγεται η μπλε μπάλα για **πρώτη φορά**. Π.χ., αν η πρώτη επιλεγθείσα μπάλα είναι κόκκινη και η δεύτερη είναι μπλε, τότε $X = 2$. Υποθέστε ότι οι επιλογές γίνονται ανεξάρτητα.

- (α) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. X , δηλαδή τις πιθανότητες $P(X = i)$ για $i \geq 1$.
- (β) Δείξτε ότι το γεγονός “η μπλε μπάλα τελικά επιλέγεται” συμβαίνει με πιθανότητα 1. Υπόδειξη: Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > n)$ και πάρτε το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$.
- (γ) Τι μπορείτε να πείτε για την αναμενόμενη τιμή, $E[X]$, της τ.μ. X ; (δηλαδή, πόσες προσπάθειες κατά μέσο όρο χρειάζονται για να επιλεγεί η μπλε μπάλα;)

Άσκηση 3. Οι τ.μ. X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & x \in \{1, 2, 4\} \text{ και } y \in \{1, 3\}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Ποια είναι η τιμή της σταθεράς c ;
- (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y < X)$.
- (γ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y > X)$.
- (δ) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = X)$.
- (ε) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y = 3)$.
- (στ) Υπολογίστε τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
- (ζ) Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E[X]$ και $E[Y]$.
- (η) Υπολογίστε τις διασπορές $\text{var}(X)$ και $\text{var}(Y)$.

Άσκηση 4. Το πρώτο πράγμα που κάνει ο Νίκος κάθε πρωί που φτάνει στην δουλειά του είναι να πηγαίνει στο γραφείο με τα αναλώσιμα και να παίρνει ένα ή δύο ή τρία μολύβια (με πιθανότητα $1/3$). Αν πάρει 3 μολύβια, δεν επιστρέφει στο γραφείο κατά τη διάρκεια της μέρας. Αν πάρει ένα ή δύο μολύβια, τότε θα επιστρέψει για μία μόνο φορά την ίδια μέρα στο γραφείο για να πάρει ξανά ένα ή δύο ή τρία μολύβια (με πιθανότητα $1/3$).

Σημείωση: Ο αριθμός των μολυβιών που ο Νίκος παίρνει στην πρώτη επίσκεψη είναι ανεξάρτητος του αριθμού που παίρνει σε πιθανή δεύτερη επίσκεψη. Υπολογίστε τα εξής:

- (α) $P(A)$, όπου A είναι το γεγονός ότι ο Νίκος παίρνει συνολικά 3 μολύβια κατά τη διάρκεια μιας μέρας.
- (β) $P(B|A)$, όπου B είναι το γεγονός ότι ο Νίκος επισκέφτηκε το γραφείο με τα αναλώσιμα 2 φορές σε μία μέρα.
- (γ) $E[N]$ και $E[N|C]$, όπου N είναι ο συνολικός αριθμός μολυβιών που ο Νίκος παίρνει κατά τη διάρκεια μιας μέρας και C είναι το γεγονός $N > 3$.
- (δ) $\sigma_{N|C}$, τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση της τ.μ. N δεδομένου του C .
- (ε) $P(D)$, όπου D είναι το γεγονός ότι ο Νίκος θα πάρει περισσότερα από 3 μολύβια κάθε μία από τις επόμενες 16 μέρες.

Άσκηση 5. Η Καθηγήτρια May B. Right (MBR) κάνει συχνά λάθη στην τάξη στην οποία διδάσκει. Απαντά λάθος με πιθανότητα $1/4$ σε κάθε ερώτηση που της γίνεται, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Σε κάθε μάθημα, της γίνονται 1 ή 2 ή 3 ερωτήσεις με πιθανότητα $1/3$.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι η MBR απαντά λάθος σε όλες τις ερωτήσεις που της γίνονται κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος;
- (β) Δεδομένου ότι η MBR απάντησε λάθος σε όλες τις ερωτήσεις που της έγιναν κατά τη διάρκεια ενός μαθήματος, ποια είναι η πιθανότητα ότι της έγιναν 3 ερωτήσεις;
- (γ) Έστω X και Y ο αριθμός των ερωτήσεων που τις γίνονται και ο αριθμός των ερωτήσεων που απαντά **σωστά** σε ένα μάθημα, αντίστοιχα. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X .
- (δ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π. $p_{X,Y}(x, y)$.
- (ε) Για να ενθαρρύνει να γίνονται ερωτήσεις στα μαθήματα, το σχολείο της MBR υιοθετεί μια ασυνήθιστη τακτική επιμίσθιου (bonus) προς την καθηγήτρια, ίσο προς $10X + 20Y$ ευρώ. Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά του επιμίσθιου;
- (στ) Κατά τη διάρκεια του εξαμήνου γίνονται 20 μαθήματα. Έστω Z ο συνολικός αριθμός των ερωτήσεων που η MBR απαντά λάθος σε όλο το εξάμηνο. Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Z .

Άσκηση 6. Ο Χρήστος αφιερώνει K ώρες στην αγορά βιβλίων πιθανοτήτων. Το K είναι τ.μ. που παίρνει τις τιμές 1, 2, 3 και 4 με ίσες πιθανότητες. Ο αριθμός των βιβλίων, N , που αγοράζει ο Χρήστος είναι επίσης μία τ.μ. που προφανώς εξαρτάται από το πόση ώρα ψωνίζει:

$$p_{N/K}(n/k) = \frac{1}{k}, \text{ for } n = 1, \dots, k.$$

- (α) Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των K και N .
- (β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. της N .
- (γ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της K δεδομένου του γεγονότος $N = 2$.
- (δ) Μας δίδεται ότι ο Χρήστος αγόρασε τουλάχιστον 2 αλλά όχι περισσότερα από 3 βιβλία. Υπολογίστε τη δεσμευμένη μέση τιμή και διασπορά της K , δεδομένης της παραπάνω πληροφορίας.
- (ε) Το κόστος κάθε βιβλίου είναι τ.μ. με μέση τιμή ίση με 3 ευρώ. Υπολογίστε τη μέση τιμή του ποσού το οποίο ο Χρήστος ξόδεψε συνολικά σε βιβλία. Υπόδειξη: Δεσμεύστε ως προς τα γεγονότα $N = 1, \dots, N = 4$ και χρησιμοποιείστε το θεώρημα ολικής μέσης τιμής.