

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 29/10/2008

Άσκηση 1.

(α) Η τυχαία μεταβλητή W παίρνει τις τιμές $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Η σ.π.π. είναι:

$$p_W(w) = P\{W = w\} = P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = w\} = \binom{8}{w} \frac{1}{2^8}$$

εφόσον υπάρχουν $\binom{8}{w}$ 8-διάστατα δυαδικά διανύσματα που έχουν w 1 για $w \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Παρατηρήστε ότι:

$$\sum_{w=0}^8 p_W(w) = \sum_{w=0}^8 \binom{8}{w} \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^8} \sum_{w=0}^8 \binom{8}{w} = \frac{1}{2^8} (1+1)^8 = 1$$

όπως αναμένεται αφού η p_W είναι σ.π.π..

(β) Έχουμε ότι:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{όταν το πλήθος των 1 στο } w \text{ είναι άρτιος} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} p_X(1) &= P(X = 1) \\ &= P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 2k = \text{'άρτιος'}\} \\ &= P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 0\} + P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 2\} + P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 4\} + \\ &\quad P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 6\} + P\{w : \sum_{i=0}^7 w_i = 8\} \\ &= p_W(0) + p_W(2) + p_W(4) + p_W(6) + p_W(8) \\ &= \frac{1}{2^8} \left(\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Εφόσον $p_X(0) = 1 - p_X(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, δηλαδή:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2, & x = 1 \\ 1/2, & x = 0 \end{cases}$$

(γ) Έχουμε:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{αν } w_j = 1 \\ 0, & \text{αν } w_j = 0 \end{cases}$$

άρα:

$$p_Y(1) = P\{Y = 1\} = P\{w : w_j = 1\}.$$

Η παραπάνω πιθανότητα αναφέρεται στο γεγονός ότι οι υπόλοιπες επτά συνιστώσες $w_i, i \neq j$ μπορούν να παρουν οποιαδήποτε από τις τιμές 0 ή 1. Έχουμε:

$$\text{Πλήθος αποτελεσμάτων έτσι ώστε } \{w_j = 1 \text{ και } w_i = 0 \text{ ή } 1, i \neq j\} = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \dots + \binom{7}{7}$$

$$= \sum_{n=0}^7 \binom{7}{n} = (1+1)^7 = 2^7$$

εφόσον μπορούν να υπάρχουν είτε 0, είτε 1, είτε 2, ... είτε 7 w_i συνιστώσες που μπορούν να πάρουν την τιμή 1. Κάθε ένα από αυτά τα 2^7 αποτελέσματα έχει πιθανότητα $1/2^8$, έτσι:

$$p_Y(1) = P\{Y = 1\} = P\{w : w_j = 1\} = \frac{2^7}{2^8} = \frac{1}{2}.$$

Πρέπει να ισχύει $p_Y(0) + p_Y(1) = 1$, άρα $p_Y(1) = \frac{1}{2}$ και:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & \text{αν } y = 1 \\ 1/2, & \text{αν } y = 0 \end{cases}$$

(δ) Έχουμε:

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{αν } \max_i(w_j) = 1 \\ 0, & \text{αν } \max_i(w_j) = 0 \end{cases}$$

άρα

$$p_Z(0) = P\{Z = 0\} = P\{w : \max_i(w_i) = 0\} = P\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\} = \frac{1}{2^8}.$$

Πρέπει να ισχύει $p_Z(0) + p_Z(1) = 1$, άρα $p_Z(1) = \frac{255}{256}$, και

$$p_Z(z) = \begin{cases} 255/256, & \text{αν } z = 1 \\ 1/256, & \text{αν } z = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2.

Οι πιθανές τιμές της τυχαίας μεταβλητής X είναι 0, 1 και 2. Κάθε ένα από τα 2^5 πιθανά ενδεχόμενα (ακολουθίες από κεφαλές και γράμματα μήκος 5) έχει πιθανότητα 2^{-5} . Για να βρούμε την σ.π.π. της X χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε το πλήθος των ακολουθιών που έχουν 0, 1 και 2 πρότυπα κεφαλής-γραμμάτων (HT patterns).

Για να βρούμε το πλήθος των ακολουθιών με 2 πρότυπα κεφαλής-γραμμάτων (HT patterns), θα ορίσουμε την ακολουθία κεφαλής-γραμμάτων ως το πρότυπο A . Συνεπώς ψάχνουμε όλες τις δυνατές ακολουθίες μήκους 3 που αποτελούνται από δύο προτυπα A και ένα H ή T . Το πλήθος των ζητούμενων ακολουθιών είναι $2 \times \binom{3}{2} = 6$.

Οι ακολουθίες χωρίς πρότυπα κεφαλής-γραμμάτων είναι οι εξής έξι:

$$HHHHH, THHHH, TTHHH, TTTTH, TTTT, TTTTT,$$

δηλαδή οι ακολουθίες με 0 έως 5 γράμματα (T) που ακολουθούνται από κεφαλές (H). Συνεπώς:

$$p_X(0) = p_X(2) = 6 \times 2^{-5} = \frac{3}{16}$$

$$p_X(1) = 1 - p_X(0) - p_X(2) = \frac{5}{8}.$$

Άσκηση 3.

Η πιθανότητα να κερδίσει ο δεύτερος παίχτης το παιχνίδι κατά τον πρώτο γύρο (έστω p_1) είναι η πιθανότητα ο πρώτος παίχτης να μην φέρει 6 ΚΑΙ ο δεύτερος να φέρει 6. Εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο, έχουμε:

$$p_1 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}.$$

Η πιθανότητα να κερδίσει ο δεύτερος παίχτης το παιχνίδι κατά τον δεύτερο γύρο (έστω p_2) είναι η πιθανότητα οι πρώτοι επτά παίχτες να μην φέρουν 6 (δηλαδή οι παίχτες 1 έως 6 και ο πρώτος για δεύτερη φορά) ΚΑΙ ο δεύτερος να φέρει 6:

$$p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{6+1} \times \frac{1}{6}.$$

Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ο δεύτερος παίχτης να κερδίσει το παιχνίδι κατά την n -ρίψη του ζαριού ως:

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)+1} \times \frac{1}{6}.$$

Για να αποκτήσουμε την συνολική πιθανότητα ο δεύτερος παίχτης να κερδίσει το παιχνίδι αθροίζουμε τις παραπάνω πιθανότητες και έχουμε:

$$\begin{aligned} P(\text{ο δευτερος παίχτης κερδίζει}) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (5/6)^{6(n-1)+1} (1/6) \\ &= (5/6)(1/6) \sum_{n=1}^{\infty} (5/6)^{6(n-1)} \\ &= (5/6)(1/6) \sum_{n=0}^{\infty} (5/6)^{6n} \end{aligned}$$

Εφόσον $|(5/6)^6| < 1$, τότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((5/6)^6)^n = \frac{1}{1 - (5/6)^6} = \frac{6^6}{6^6 - 5^6}.$$

Άρα:

$$P(\text{ο δευτερος παίχτης κερδίζει}) = (5/6)(1/6) \frac{6^6}{6^6 - 5^6} = 0.21$$

Άσκηση 4.

Η πιθανότητα να συμβεί ένα μόνο λάθος για κάθε bit είναι $p = 0.2$, ανεξάρτητα αν το bit είναι 1 ή 0. Με βάση αυτή την παρατήρηση, έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή E είναι διωνυμική με παραμέτρους ($n = 40, p = 0.2$).

(α)

$$p_E(e_0) = \binom{40}{e_0} 0.2^{e_0} \times 0.8^{40-e_0}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(\text{τουλάχιστον 38 bits είναι σωστά}) &= P(E_0 < 3) \\ &= P(E_0 = 2) + P(E_0 = 1) + P(E_0 = 0) \\ &= \binom{40}{2} 0.2^2 \times 0.8^{38} + \binom{40}{1} 0.2^1 \times 0.8^{39} + \binom{40}{0} 0.2^0 \times 0.8^{40} \\ &= 0.00794 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(E_0 > 0) &= 1 - P(E_0 = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} (1-p)^{n-0} \\ &= 1 - \binom{6 \times 10^7}{0} (1 - 5 \times 10^{-8})^{6 \times 10^7} \\ &= 0.95022 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Αν μια τυχαία μεταβλητή X είναι Poisson με παράμετρο λ , τότε έχει ρυθμό:

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

Έχουμε ότι,

$$\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\lambda^i e^{-\lambda} (i-1)!}{i! \lambda^{i-1} e^{-\lambda}} = \lambda/i$$

και για $0 < i < \lambda$, το κλάσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας, συνεπώς η $P(X=i)$ είναι μονοτονικά αύξουσα. Αλλιώς το κλάσμα είναι μικρότερο της μονάδας, οπότε και η $P(X=i)$ είναι μονοτονικά φθίνουσα.

Άσκηση 6.

(α)

```
>> N = 20;
>> p = 0.2;
>> X = sum(rand(20, 1) < 0.2);
```

(β)

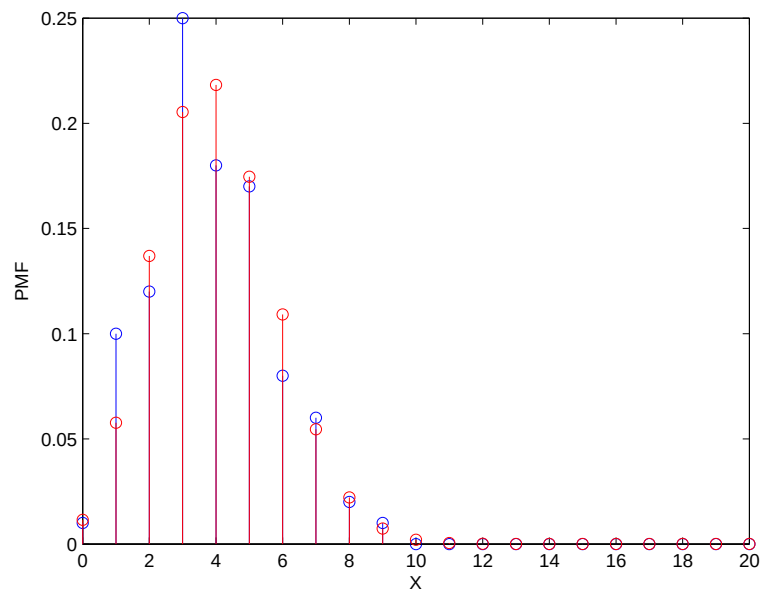
```
>> allX = zeros(100,1);
>> for i=1:100
>>   allX(i) = sum(rand(20,1) < 0.2);
>> end
>> estPMF = zeros(21,1);
>> for value=0:20
>>   estPMF(value+1)=sum(allX == value); %the +1 to avoid index 0!
>> end
>> estPMF = estPMF/100; % normalization
>> allvalues = 0:20; % 21 x 1 vector;
>> stem(allvalues,estPMF);
>> hold on;
>> for value=0:20
>>   PMF(value+1)=(factorial(N)/(factorial(value)*
>>     factorial(N-value)))*(p^value)*(1-p)^(N-value);
>> end
>> stem(allvalues, PMF, 'r')
```

Στο σχήμα 1 φαίνεται η εκτιμώμενη (μπλε) και η θεωρητική (κόκκινο) $\sigma.π.π$ της τυχαίας μεταβλητής X . Η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $n = 20$ και $p = 0.2$.

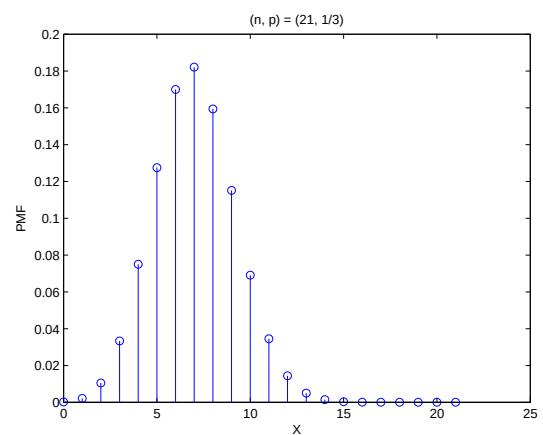
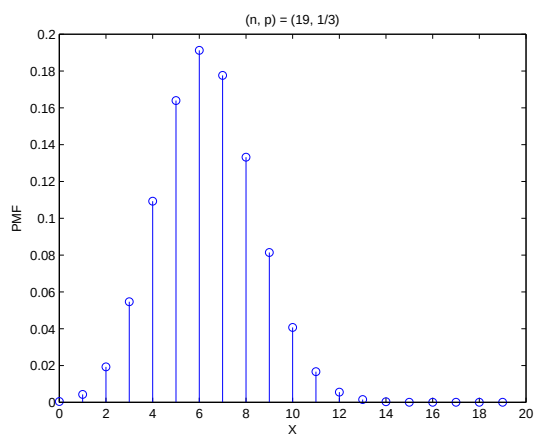
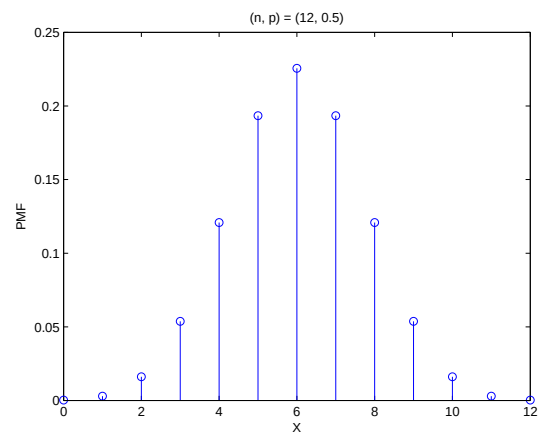
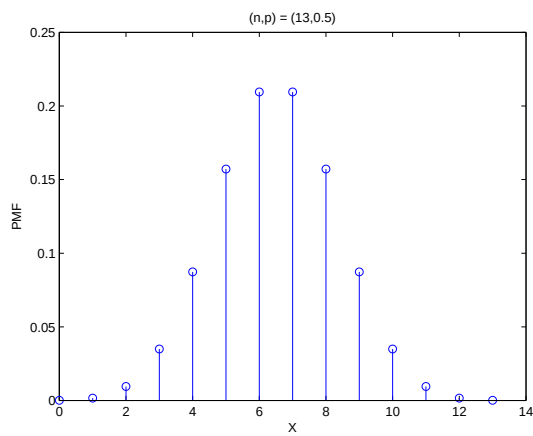
(γ) Για $p = 1/2$, η $\sigma.π.π$ είναι συμμετρική. Τότε όταν np είναι ακέραιος, η συνάρτηση μεγιστοποιείται στο σημείο np . Όταν $p \neq 1/2$, η παράσταση δεν είναι συμμετρική. Τότε όταν np είναι ακέραιος, η συνάρτηση μεγιστοποιείται στο np , ενώ όταν το np δεν είναι ακέραιος τότε οι δύο μέγιστες τιμές της συνάρτησης βρίσκονται αριστερά και δεξιά του np . Για τις γραφικές παραστάσεις βλέπε σχήμα 3.

(δ)

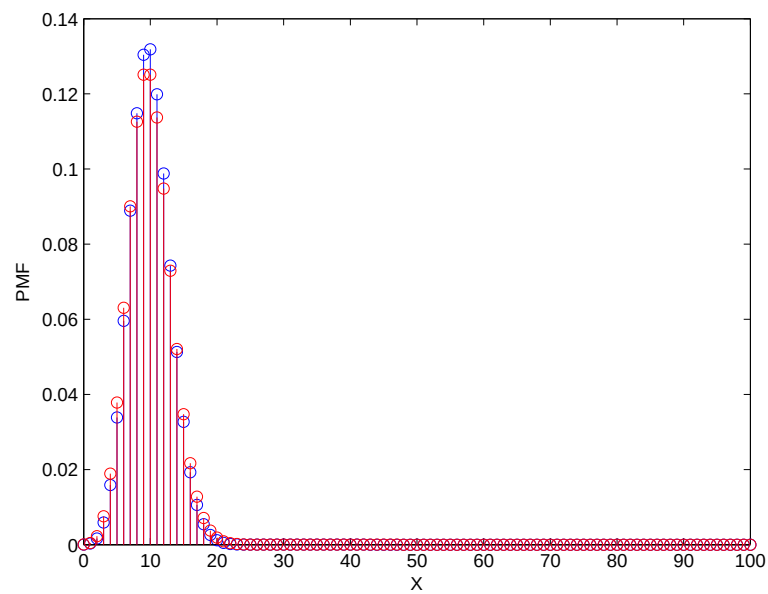
```
>> n=100; p=0.1;
>> for value=0:n
>>   BinomialPMF(value+1)=(factorial(n)/(factorial(value)*factorial(n-value)))*p^value*(1-p)^(n-value);
>> end
>> allvalues = 0:n;
>> clf;
>> stem(allvalues ,BinomialPMF);
>> hold on;
>> for value=0:n
>>   PoissonPMF(value+1)=((10)^value)*exp(-10)/factorial(value);
>> end
>> stem(allvalues,PoissonPMF,'r'); % pretty good match!
```



Σχήμα 1: Η $\sigma.π.π$ της τυχαίας μεταβλητής X για το ερώτημα (β) της άσκησης 6.



Σχήμα 2: Άσκηση 6 ερώτημα (γ).



Σχήμα 3: Άσκηση 6 ερώτημα (δ). Με μπλέ είναι η γραφική παράσταση της διωνυμικής για ($n = 100, p = 0.1$) και με κόκκινο η γραφική παράσταση της Poisson με παράμετρο $\lambda = 10$.