ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 22/10/2008 Ημερομηνία Παράδοσης: 29/10/2008

Θέματα: Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές (Ι).

Άσκηση 1. Ο δειγματοχώρος Ω ενός πειράματος αποτελείται από όλα τα δυαδικά διανύσματα διάστασης 8, δηλαδή, κάθε δειγματοσημείο του Ω έχει τη μορφή $\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_7)$, όπου το ω_i είναι 0 ή 1. Ο ομοιόμορφος πιθανοτικός νόμος εκχωρεί πιθανότητα $1/2^8$ σε καθένα από τα 2^8 στοιχεία του Ω. Υπολογίστε τις συναρτήσεις πιθανότητας των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών (τ.μ.) ορισμένων στο Ω:

(α) $W(\omega) = \sum_{i=0}^{7} \omega_i$, δηλαδή, το πλήθος των 1 στο δυαδικό διάνυσμα.
(β) $X(\omega) = 1$ όταν το πλήθος των 1 στο ω είναι άρτιος αριθμός, και 0 αλλιώς.
(γ) $Y(\omega) = \omega_4$, δηλαδή, η τιμή της τέταρτης συνιστώσας του ω.
(δ) $Z(\omega) = \max_i(\omega_i)$.

Άσκηση 2. Θεωρείστε μία ακολουθία από πέντε ανεξάρτητες διαδοχικές ρίψεις ενός δίκαιου κέρματος. Ορίστε την τ.μ. X ως τον αριθμό των φορών που μία κεφαλή (H) ακολουθείται αμέσως από γράμματα (T). Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της X.

Άσκηση 3. Έξι παίκτες κάθονται γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Ο παίκτης 1 ρίχνει ένα δίκαιο εξάεδρο ζάρι και κατόπιν το δίνει στον παίκτη 2 στα αριστερά του. Ο παίκτης 2 ρίχνει με τη σειρά του το ζάρι και κατόπιν το δίνει στον παίκτη 3 στα αριστερά του, κοκ. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρις ότου κάποιος από τους παίκτες φέρει πρώτος εξάρι. Αυτός ο παίκτης κερδίζει. Με ποια πιθανότητα κερδίζει ο παίκτης 2;

Άσκηση 4. Θεωρείστε το δυαδικό συμμετρικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι που μελετήσαμε στην τάξη. Για αυτό το κανάλι, η πιθανότητα απλού σφάλματος για ένα τυχαίο bit (0 ή 1) είναι $p = 0.2$. Η είσοδος στο κανάλι είναι μία δυαδική ακολουθία από 0 και 1, τα οποία είναι ανεξάρτητα. Ορίζουμε την τ.μ. E ως τον αριθμό των λαθών που γίνονται κατά την μετάδοση πέντε (5) συμβόλων με 8 bits το καθένα (40 bits συνολικά).

(α) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιαθνότητας της E.
(β) Ποια είναι η πιθανότητα σωστής λήψης τουλάχιστον 38 από τα 40 bits;
(γ) Έστω τώρα ότι $p = 5 \times 10^{-8}$ και υποθέστε ότι μεταδίδονται 10^6 bits το δευτερόλεπτο. Ποια η πιθανότητα τουλάχιστον ενός σφάλματος το λεπτό;

Άσκηση 5. Η τ.μ. X είναι Poisson με παράμετρο λ. Δείξτε ότι η πιθανότητα $P(X = i)$ αυξάνεται μονότονα με το i έως ότου το i φτάσει στο μεγαλύτερο φυσικό αριθμό μικρότερο του λ, και κατόπιν μειώνεται μονότονα με το i.

Άσκηση 6.
(α) Ένα εργαστήριο έχει N υπολογιστές συνδεδεμένους στο δίκτυο. Κάθε υπολογιστής δημιουργεί ένα πακέτο δεδομένων ανά μονάδα χρόνου με πιθανότητα p, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Γράψτε ένα μικρό πρόγραμμα (π.χ. σε Matlab) για να προσομοιώσετε το συνολικό αριθμό των πακέτων που δημιουργούνται. Χρησιμοποιείστε τις τιμές $N = 20$ και $p = 0.2$, και ονομάστε X την σχετική τ.μ.

(β) Δημιουργείστε 100 δείγματα της τ.μ. X και εκτιμήστε την συνάρτηση πιθανότητας. Με άλλα λόγια, σχηματίστε το ιστόγραμμα των 100 δειγμάτων. Τι είδους τ.μ. είναι η X? Δώστε τη γραφική παράσταση της εκτιμούμενης συνάρτησης πιθανότητας (του ιστογράμματος) καθώς και της θεωρητικής συνάρτησης πιθανότητας.

(γ) Δώστε τις γραφικές παραστάσεις της Διωνυμικής συνάρτησης πιθανότητας για:

$$(n, p) = (13, 1/2),\ (12, 1/2),\ (19, 1/3),\ \text{και}\ (21, 1/3).$$

Τι παρατηρείτε?

(δ) Τέλος, δώστε τη γραφική παράσταση της Διωνυμικής για $(n = 100, p = 0.1)$ καθώς και της Poisson με παράμετρο $\lambda = 10$. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.