

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 22/10/2008

Άσκηση 1.

(α) Εφόσον τα ζάρια είναι δίκαια και τα πειράματα εκτελούνται ανεξάρτητα, η πιθανότητα για οποιοδήποτε ζεύγος ρίψεων είναι ίση με $1/36$, και

$$P(A) = 1/2, P(B) = 1/2, P(C) = 1/9$$

Εφόσον $A \cap B \cap C = \{(3, 6)\}$, τότε $P(A \cap B \cap C) = 1/36 = P(A)P(B)P(C)$.

(β) Έχουμε ότι

$$A \cap B = \{\text{Το πρώτο ζάρι φέρνει 2 ή 3}\}$$

Συνεπώς:

$$P(A \cap B) = 2/6 = 1/3 \neq 1/4 = P(A)P(B)$$

άρα τα A, B και C δεν είναι ανεξάρτητα.

Άσκηση 2.

(α) Εφόσον το κέρμα είναι δίκαιο, τα γεγονότα H_1 και H_2 είναι ανεξάρτητα.

(β) Γνωρίζουμε ότι:

$$P(H_1|D) = 1/2, P(H_2|D) = 1/2, P(H_1 \cap H_2|D) = 0$$

άρα $P(H_1 \cap H_2|D) \neq P(H_1|D)P(H_2|D)$, συνεπώς τα γεγονότα H_1, H_2 δεν είναι υπο συνθήκη ανεξάρτητα.

Άσκηση 3.

(α) Δεδομένου την επιλογή του κέρματος, τα γεγονότα H_1 και H_2 είναι ανεξάρτητα, εφόσον υποθέτουμε ότι οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Οπότε:

$$P(H_1 \cap H_2|B) = P(H_1|B)P(H_2|B) = 0.99 \times 0.99.$$

(β) Τα γεγονότα H_1 και H_2 δεν είναι ανεξάρτητα. Διαισθητικά, αν μας έλεγαν ότι η πρώτη ρίψη είχε ως αποτέλεσμα κεφαλή, αυτό μας οδηγεί να υποψιαστούμε ότι το μπλέ κέρμα έχει επιλεγεί. Σε αυτήν την περίπτωση αναμένουμε ότι και η δεύτερη ρίψη θα έχει ως αποτέλεσμα κεφαλή. Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$P(H_1) = P(B)P(H_1|B) + P(B^c)P(H_1|B^c) = \frac{1}{2} \times 0.99 \times 0.99 + \frac{1}{2} \times 0.01 \times 0.01 \approx \frac{1}{2}$$

Ομοίως έχουμε $P(H_2) = 1/2$. Παρατηρήστε ότι:

$$\begin{aligned} P(H_1 \cap H_2) &= P(B)P(H_1 \cap H_2|B) + P(B^c)P(H_1 \cap H_2|B^c) \\ &= \frac{1}{2} \times 0.99 \times 0.99 + \frac{1}{2} \times 0.01 \times 0.01 \\ &\approx \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Εφόσον $P(H_1 \cap H_2) \neq P(H_1)P(H_2)$, τότε τα γεγονότα H_1 και H_2 δεν είναι ανεξάρτητα, αν και είναι ανεξάρτητα δεδομένου του B .

Άσκηση 4.

(α) Δεδομένου ότι έχουμε φέρει ακριβώς μία κεφαλή, η κεφαλή μπορεί να έχει συμβεί σε οποιαδήποτε από τις n ρίψεις του κέρματος. Άρα η πιθανότητα να έρθει κεφαλή στην πρώτη ρίψη είναι ίση με $\frac{1}{n}$.

(β) Δεδομένου ότι έχουμε φέρει ακριβώς δύο κεφαλές, αν η πρώτη ρίψη φέρει κεφαλή, τότε υπάρχουν $n - 1$ θέσεις όπου η δεύτερη κεφαλή μπορεί συμβεί. Ο συνολικός αριθμός όλων των δυνατών συνδιασμών όπου δύο κεφαλές μπορούν να έρθουν σε n ρίψεις είναι $\binom{n}{2}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}}.$$

(γ) Δεδομένου ότι έχουμε φέρει 7 κεφαλές, η πιθανότητα ότι οι 3 από τις πρώτες 4 ρίψεις να έφεραν κεφαλή αποτελείται από τρία μέρη:

- Το συνολικός αριθμός να έρθουν 3 κεφαλές στις πρώτες 4 ρίψεις είναι $\binom{4}{3}$.
- Το συνολικός αριθμός να έρθουν 4 κεφαλές στις υπόλοιπες $n - 4$ ρίψεις είναι $\binom{n-4}{4}$.
- Το συνολικός αριθμός να έρθουν 7 κεφαλές σε n ρίψεις είναι $\binom{n}{7}$.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{4}{3} \binom{n-4}{4}}{\binom{n}{7}}.$$

Άσκηση 5.

Την άνοιξη και το φθινόπωρο, κάθε μέρα έχει τρεις πιθανές καταστάσεις για τον καιρό, συνεπώς για κάθε μια από αυτές τις εποχές το συνολικό πλήθος των καταστάσεων είναι 3^{90} . Ομοίως, υπάρχουν 4^{90} καταστάσεις για τον χειμώνα και 2^{90} καταστάσεις για το καλοκαίρι. Ο συνολικός πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτιών καιρού για 360 μέρες είναι:

$$3^{90} \times 3^{90} \times 4^{90} \times 2^{90} \approx 10^{167}.$$

Άσκηση 6.

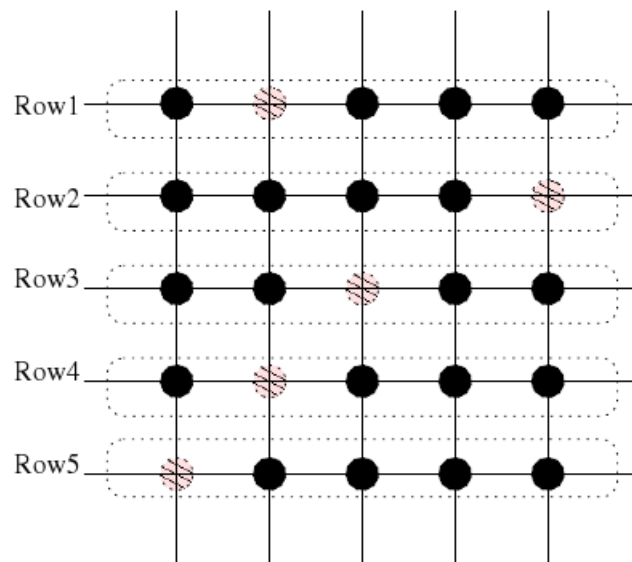
Υπάρχουν $n!$ τρόποι για να κατανέμεις n καπέλα σε n διαφορετικούς ανθρώπους. Εφόσον οι $n - 2$ άνθρωποι επέλεξαν σωστά το δικό τους καπέλο, υπάρχουν μόνο δυο καπέλα που μπορούμε να κατανείμουμε ελεύθερα. Όμως επειδή μόνο $n - 2$ άνθρωποι επέλεξαν τα καπέλα τους σωστά, τα δυο τελευταία καπέλα πρέπει να τοποθετήθηκαν λάθασμένα. Το συνολικό πλήθος για δύο ανθρώπους να πάρουν το λάθος καπέλο είναι $\binom{n}{2}$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{\binom{n}{2}}{n!}.$$

Άσκηση 7.

(α) Υπάρχουν συνολικά $25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 25!/20!$ τρόποι για να επιλέξεις 5 μπάλες από ένα σύνολο 25. Αυτό προκύπτει αν σκεφτούμε ότι αρχικά υπάρχουν 25 μπάλες να επιλέξουμε για την πρώτη μπάλα, 24 επιλογές για την δεύτερη κοκ. Αν τώρα θέλουμε να επιλέξουμε 5 μπάλες, αλλά να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές, το πλήθος των επιλογών μας αλλάζει. Για την πρώτη μπάλα έχουμε 25 επιλογές, για την δεύτερη μπάλα δεν μπορούμε να επιλέξουμε μπάλες που βρίσκονται στην ίδια σειρά με την πρώτη μπάλα, άρα έχουμε $25 - 5 = 20$ επιλογές. Ομοίως για την τρίτη μπάλα, έχουμε $20 - 5 = 15$ επιλογές, εφόσον δεν μπορεί να είναι από την ίδια σειρά που πήραμε την πρώτη ή την δεύτερη μπάλα. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και τα πλήθη των δυνατών επιλογών και για τις υπόλοιπες μπάλες. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα να επιλέξουμε 5 μπάλες οι οποίες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές είναι:

$$\frac{25 \times 20 \times 15 \times 10 \times 5}{\frac{25!}{20!}}.$$



Σχήμα 1: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα α της άσκησης 7.

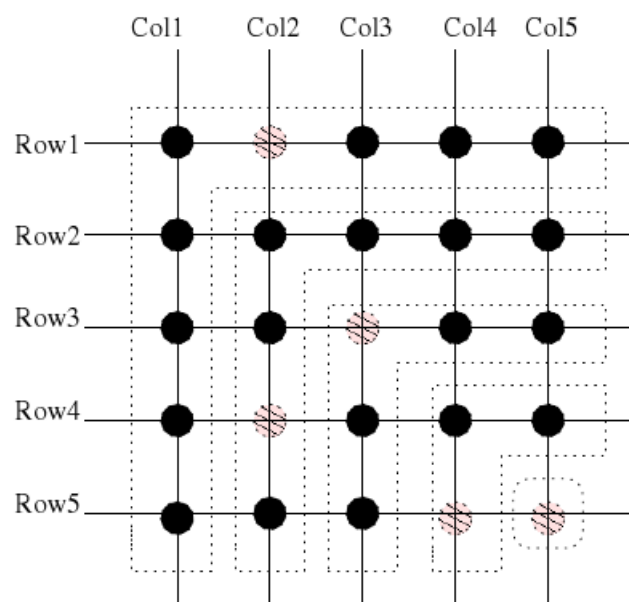
(β) Κοιτάζοντας το 5×5 πλέγμα, υπάρχουν πέντε θέσεις για να επιλέξουμε την πρώτη μπάλα από την πρώτη σειρά. Για την δεύτερη μπάλα υπάρχουν τέσσερις θέσεις στην δεύτερη σειρά από τις οποίες μπορούμε να την επιλέξουμε. Ομοίως για την τρίτη μπάλα, υπάρχουν τρεις πιθανές θέσεις στην τρίτη σειρά και δύο θέσεις από την τέταρτη σειρά για την τέταρτη μπάλα. Τέλος, για την πέμπτη μπάλα υπάρχει μονάχα μια θέση στην πέμπτη σειρά που μπορούμε να την επιλέξουμε. Άρα ο συνολικός αριθμός θέσεων που μπορούμε να επιλέξουμε είναι : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$. Παρατηρήστε ότι υπάρχουν $5!$ τρόποι για να ταξινομήσουμε τις πέντε σειρές. Άρα ο συνολικός αριθμός που μπορούμε να επιλέξουμε πέντε μπάλες έτσι ώστε να βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι : $5!5!$. Ο συνολικός αριθμός επιλογών πέντε μπάλες από 25 είναι $\frac{25!}{20!}$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{5!5!}{\frac{25!}{20!}} \cdot$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να σκεφτούμε το ίδιο πρόβλημα είναι ο ακόλουθος :

Για την πρώτη μπάλα έχουμε 25 πιθανές θέσεις από όπου μπορούμε να την επιλέξουμε. Εμποδίζοντας την σειρά και την στήλη από την οποία την επιλέξαμε, μας απομένουν 16 θέσεις επιλογής για την δεύτερη μπάλα. Ομοίως εμποδίζοντας την σειρά και την στήλη που επιλέξαμε την δεύτερη μπάλα μας μένουν 9 θέσεις επιλογής για την τρίτη μπάλα, για την τέταρτη 4 θέσεις, ενώ για την τελευταία 1 θέση. Άρα το συνολικό πλήθος που μπορούμε να επιλέξουμε τις 5 μπάλες από διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες είναι $25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{25 \times 16 \times 9 \times 4 \times 1}{\frac{25!}{20!}} \cdot$$



Σχήμα 2: Σχηματική αναπαράσταση για το ερώτημα β της άσκησης 7.