

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 22/10/2008

Θέματα: Ανεξαρτησία, Συνδυαστική Ανάλυση.

Άσκηση 1. Θεωρείστε ανεξάρτητες ρίψεις δύο δίκαιων εξαεδρων ζαριών. Ορίζουμε τα γεγονότα:

$A = \{\text{Το πρώτο ζάρι φέρνει: } 1, 2, \text{ ή } 3\},$

$B = \{\text{Το πρώτο ζάρι φέρνει: } 2, 3, \text{ ή } 6\}, \text{ και}$

$C = \{\text{Το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι } 9\}.$

(α) Δείξτε ότι $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$

(β) Είναι τα $A, B,$ και C ανεξάρτητα?

Άσκηση 2. Ανεξαρτησία δεν συνεπάγεται υπό συνθήκη ανεξαρτησία: Ρίχνουμε ένα δίκαιο κέρμα δύο φορές. Ορίζουμε τα γεγονότα:

$H_1 = \{\text{Η πρώτη ρίψη φέρνει Κεφαλή}\},$

$H_2 = \{\text{Η δεύτερη ρίψη φέρνει Κεφαλή}\}, \text{ και}$

$D = \{\text{Οι δύο ρίψεις φέρνουν διαφορετικό αποτέλεσμα}\}.$

(α) Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 ανεξάρτητα;

(β) Είναι τα γεγονότα H_1 και H_2 υπό συνθήκη ανεξάρτητα, δεδομένου του D ;

Άσκηση 3. Υπό συνθήκη ανεξαρτησία δεν συνεπάγεται ανεξαρτησία: Έχουμε δύο κέρματα, ένα μπλε και ένα κόκκινο. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα δύο (με πιθανότητα $1/2$) και το ρίχνουμε δύο φορές. Τα κέρματα δεν είναι δίκαια: Με το μπλε, η πιθανότητα να φέρουμε κεφαλή είναι 0.99 , ενώ με το κόκκινο είναι 0.01 . Έστω B το γεγονός ότι επιλέξαμε το μπλε κέρμα. Έστω H_i το γεγονός ότι η i -στή ρίψη ($i = 1, 2$) έφερε κεφαλή.

(α) Δείξτε ότι $P(H_1 \cap H_2/B) = P(H_1/B)P(H_2/B)$, δηλαδή, τα H_1 και H_2 είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα, δεδομένου του B .

(β) Δείξτε ότι $P(H_1 \cap H_2) \neq P(H_1)P(H_2)$, δηλαδή, τα H_1 and H_2 δεν είναι ανεξάρτητα.

Χρησιμοποιείστε τη διαίσθησή σας για να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 4. Μόλις ολοκληρώσαμε n ανεξάρτητες ρίψεις ενός κέρματος το οποίο φέρνει κεφαλή με πιθανότητα p .

(α) Δεδομένου ότι φέρνουμε κεφαλή ακριβώς μία φορά, ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη έφερε κεφαλή;

(β) Δεδομένου ότι φέρνουμε κεφαλή ακριβώς δύο φορές, ποια είναι η πιθανότητα ότι η πρώτη ρίψη έφερε κεφαλή;

(γ) Δεδομένου ότι φέρνουμε κεφαλή ακριβώς 7 φορές, ποια είναι η πιθανότητα ότι 3 από τις πρώτες 4 ρίψεις έφεραν κεφαλή;

Άσκηση 5. Το δελτίο καιρού για μία τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει "ήλιος", "συννεφιά", "βροχή", ή "χιόνι". Υποθέτουμε τέσσερις εποχές (φθινόπωρο, χειμώνας, άνοιξη, καλοκαίρι) με 90 ημέρες στην κάθε εποχή, ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα, και ότι δεν βρέχει το καλοκαίρι. Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά (δηλαδή ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού 360-μερών).

Άσκηση 6. Τα καπέλα n ατόμων τοποθετούνται σε ένα κουτί. Κάθε άτομο παίρνει τυχαία ένα καπέλο από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ακριβώς $n - 2$ άτομα θα πάρουν το δικό τους καπέλο;

Άσκηση 7. 25 μαύρες μπάλες τοποθετούνται σε πέντε σειρές, με κάθε σειρά να περιέχει 5 μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία 5 από τις μπάλες και τις βάζουμε κόκκινες.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι όλες οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές;
- (β) Ποια είναι η πιθανότητα ότι όλες οι κόκκινες μπάλες βρίσκονται σε διαφορετικές σειρές και διαφορετικές στήλες;