

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/10/2008

Άσκηση 1.

Έστω A το γεγονός ότι διαβάζουμε 0, B_0 ο γεγονός ότι το bit ήταν 0, ενώ B_1 το γεγονός ότι το bit ήταν 1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes έχουμε:

$$P(B_0|A) = \frac{P(A|B_0)P(B_0)}{P(A|B_0)P(B_0) + P(A|B_1)P(B_1)} = \frac{0.9 \times 0.5}{0.9 \times 0.5 + 0.005 \times 0.5} = 0.9474$$

Άσκηση 2.

Έστω A το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε το ζάρι Α, ενώ B το γεγονός ότι χρησιμοποιούμε το ζάρι Β. Εφόσον χρησιμοποιούμε αμερόληπτο νόμισμα για να επιλέξουμε ένα από τα δύο ζάρια, έχουμε ότι $P(A) = P(B) = 1/2$.

(α)

$$P(\text{Πράσινο}) = P(A)P(\text{Πράσινο}|A) + P(B)P(\text{Πράσινο}|B) = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{3}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(\text{Πράσινο στην } n\text{-οστή και } n-1\text{-οστή ρίψη}) &= P(A)P(\text{Πράσινο στην } n\text{-οστή και } n-1\text{-οστή ρίψη}|A) \\ &+ P(B)P(\text{Πράσινο στην } n\text{-οστή και } n-1\text{-οστή ρίψη}|B) \\ &= P(A) (P(\text{Πράσινο}|A))^2 + P(B) (P(\text{Πράσινο}|B))^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{5}{6} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{17}{36} \end{aligned}$$

(γ) Έστω C το γεγονός ότι έρχεται πράσινο στην $n+1$ -οστή ρίψη, D το γεγονός ότι στις πρώτες n ρίψεις έχουμε πράσινο και E το γεγονός ότι έρχεται πράσινο στις πρώτες $n+1$ ρίψεις. Τότε:

$$\begin{aligned} P(C|D) &= \frac{P(C \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(E)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B)} \\ &= \frac{(5/6)^{n+1} + (1/2)^{n+1}}{(5/6)^n + (1/2)^n} \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B)} \\ &= \frac{(5/6)^n}{(5/6)^n + (1/2)^n} \end{aligned}$$

Για μεγάλες τιμές του n η δεσμευμένη πιθανότητα να χρησιμοποιούμε το ζάρι A τείνει στο 1. συνεπώς αναμένουμε και η δεσμευμένη πιθανότητα να έχουμε συνεχώς πράσινο σε κάθε γύρο να πλησιάζει την πιθανότητα το ζάρι A να φέρνει πράσινο, άρα $5/6$.

Άσκηση 3.

Γνωρίζουμε ότι $P(s_i \text{ έχει σταλεί}) = 1/3$, καθώς επίσης και τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(s_i \text{ έχει ληφθεί} | s_j \text{ έχει σταλεί})$.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να ληφθεί το σήμα s_j για $j = 1, 2, 3$:

$$P(s_j \text{ έχει ληφθεί}) = P(s_j \text{ έχει ληφθεί} | s_j \text{ έχει σταλεί}) = \begin{cases} 0.3633 & , j = 1 \\ 0.5167 & , j = 2 \\ 0.12 & , j = 3 \end{cases}$$

(β) Για κάθε μοναδικό ζεύγος (i, j) , χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$P(s_i \text{ έχει σταλεί} | s_j \text{ έχει ληφθεί}) = \frac{P(s_j \text{ έχει ληφθεί} | s_i \text{ έχει σταλεί})P(s_i \text{ έχει σταλεί})}{P(s_j \text{ έχει ληφθεί})}$$

Υπολογίζοντας τις παραπάνω πιθανότητες για κάθε ζεύγος (i, j) , μπορούμε να τοποθετήσουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες σε ένα πίνακά παρόμοιο με αυτόν της εκφώνησης:

		εκπομπή s_i		
		s_1	s_2	s_3
λήψη s_j	s_1	0.229	0.037	0.735
	s_2	0.323	0.581	0.097
	s_3	0.694	0.167	0.139

Παρατηρήστε ότι έχουμε στρογγυλοποιήσει τους υπολογισμούς στον τρίτο δεκαδικό ψηφίο. Επιπλέον οι δεσμευμένες πιθανότητες $P(s_i \text{ έχει σταλεί} | s_j \text{ έχει ληφθεί})$ αθροίζονται στην μονάδα για κάθε $i, j = 1, 2, 3$ (τυχόν αποκλίσεις οφείλονται στην στρογγυλοποίηση).

Άσκηση 4.

Αρχικά 12 πιρούνια και κανένα μαχαίρι βρίσκονται στο αριστερό συρτάρι, το οποίο κωδικοποιείται ως $(12F, 0K)$. Ομοίως, για το δεξί συρτάρι έχουμε $(0F, 12K)$. Αφού ο συγκάτοικός σας πάρει 3 πιρούνια από το αριστερό συρτάρι και τα τοποθετήσει στο δεξί, η κατάσταση του αριστερού συρταριού είναι $(9F, 0K)$, ενώ για το δεξί $(3F, 12K)$. Για το δεξί συρτάρι η πιθανότητα να επιλέξει ένα πιρούνι είναι ίση με $3/15 = 1/5$ και η πιθανότητα να επιλέξει ένα μαχαίρι ίση με $4/5$.

Από αυτή την κατάσταση, το σύστημα μπορεί να εξελιχθεί σε δύο δυνατούς τρόπους (βλέπε σχήμα 1). Θα ονομάσουμε τις καταστάσεις αυτές C_1 και C_2 . Η κατάσταση C_1 αναφέρεται στο γεγονός ότι ένα μαχαίρι μεταφέρθηκε από το δεξί συρτάρι στο αριστερό, αφήνοντας τα συρτάρια στις εξής καταστάσεις $(10F, 0K)$ και $(2F, 12K)$, ενώ η κατάσταση C_2 αναφέρεται στο γεγονός ότι ένα πιρούνι μεταφέρθηκε από το δεξί συρτάρι στο αριστερό, αφήνοντας τα συρτάρια στις εξής καταστάσεις $(9F, 1K)$ και $(3F, 11K)$. Συνεπώς $P(C_1) = 1/5$ και $P(C_2) = 4/5$. Από τον κανόνα του Bayes έχουμε:

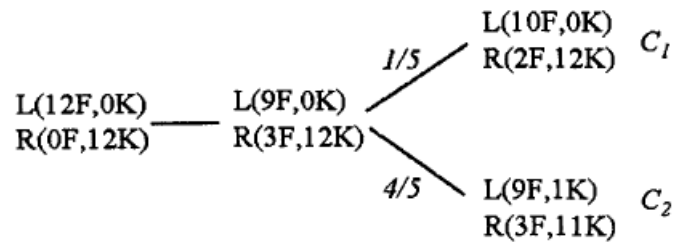
$$P(\text{αριστερό συρτάρι} | \text{μαχαίρι επιλέχθηκε}) = \frac{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε} | \text{αριστερό συρτάρι})P(\text{αριστερό συρτάρι})}{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε})}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(\text{μαχαίρι} | \text{αριστερό συρτάρι}) &= P(\text{μαχαίρι} | C_1, \text{αριστερό συρτάρι})P(C_1) \\ &+ P(\text{μαχαίρι} | C_2, \text{αριστερό συρτάρι})P(C_2) \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{2}{25} \end{aligned}$$

Ομοίως:

$$\begin{aligned} P(\text{μαχαίρι} | \text{δεξί συρτάρι}) &= P(\text{μαχαίρι} | C_1, \text{δεξί συρτάρι})P(C_1) \\ &+ P(\text{μαχαίρι} | C_2, \text{δεξί συρτάρι})P(C_2) \\ &= \frac{12}{14} \times \frac{1}{5} + \frac{11}{14} \times \frac{4}{5} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$



Σχήμα 1: Το δενδρικό διάγραμμα της άσκησης 4.

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned}
 P(\text{αριστερό συρτάρι} | \text{μαχαίρι}) &= \frac{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε} | \text{αριστερό αυρτάρι}) P(\text{αριστερό συρτάρι})}{P(\text{μαχαίρι επιλέχθηκε})} \\
 &= \frac{2/25 \times 1/2}{2/25 \times 1/2 + 4/5 \times 1/2} \\
 &= \frac{1}{11}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Γνωρίζουμε ότι

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P((A_1 \cup \dots \cup A_n)^c).$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του De Morgan έχουμε:

$$(A_1 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \dots \cap A_n^c,$$

άρα

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c)$$

Από τον ορισμό της ανεξαρτησίας έχουμε ότι:

$$P(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) = \prod_{i=1}^n P(A_i^c)$$

Για κάθε i , $P(A_i^c) = 1 - P(A_i)$, οπότε:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$