

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 8/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 15/10/2008

Θέματα: Δεσμευμένη Πιθανότητα, Νόμος του Bayes, Ανεξαρτησία.

Άσκηση 1. Μία μαγνητική ταινία η οποία περιέχει πληροφορία σε ψηφιακή μορφή έχει αλλοιωθεί. Προσπαθείτε να ανακτήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα bits πληροφορίας αλλά γνωρίζετε ότι αυτό που διαβάζετε πιθανώς είναι λάθος. Γνωρίζετε ότι αν υπήρχε ένα 0, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Επίσης, η πιθανότητα σωστής ανάγνωσης ενός 1 είναι 0.95. Κάθε bit στην ταινία είναι 0 ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Δεδομένου ότι διαβάζετε 0 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;

Άσκηση 2. Το εξαέδρο ζάρι A έχει πέντε πράσινες πλευρές και μία κόκκινη. Το ζάρι B έχει τρεις πράσινες και τρεις κόκκινες πλευρές. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα. Αν έρθει κεφαλή, το παιχνίδι συνεχίζεται ρίχνοντας μόνο το ζάρι A. Αν έρθουν γράμματα, ρίχνουμε μόνο το ζάρι B. Τα δύο ζάρια A και B είναι αμερόληπτα.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι η n -στή ρίψη ζαριού θα φέρει πράσινο.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα ότι τόσο η n -στή όσο και η $(n+1)$ -στή ρίψη ζαριού θα φέρει πράσινο.
(γ) Αν οι πρώτες n ρίψεις φέρουν όλες πράσινο, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα να έρθει πράσινο και στην $(n+1)$ -στή ρίψη. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα για μεγάλες τιμές του n .
(δ) Αν οι πρώτες n ρίψεις φέρουν όλες πράσινο, υπολογίστε τη δεσμευμένη πιθανότητα να ρίχνουμε το ζάρι A. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα για μεγάλες τιμές του n .

Άσκηση 3. Ternary Channel: Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα μεταδίδει τρία σήματα, s_1 , s_2 και s_3 , με ίσες πιθανότητες. Η μετάδοση επηρεάζεται από θόρυβο με συνέπεια το λαμβανόμενο σήμα στο δέκτη να έχει αλλάξει σύμφωνα με τις δεσμευμένες πιθανότητες (μετάβασης) του πίνακα:

$P(s_j/s_i)$	$\lambda\eta\psi\eta, s_j$			
	s_1	s_2	s_3	
$\epsilon\kappa\mu\mu\eta, s_i$	s_1	0.25	0.5	0.25
	s_2	0.04	0.9	0.06
	s_3	0.8	0.15	0.05

Τα στοιχεία του πίνακα περιέχουν τις πιθανότητες $P(\text{ελήφθη } s_j | \text{εστάλη } s_i)$. Π.χ., αν έχει σταλεί το s_1 , η πιθανότητα να ληφθεί το s_3 είναι 0.25.

- (α) Υπολογίστε την πιθανότητα να ληφθεί το σήμα s_j για $j = 1, 2, 3$.
(β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(\text{εστάλη } s_i | \text{ελήφθη } s_j)$ for $i, j = 1, 2, 3$.

Άσκηση 4. Στην κουζίνα του σπιτιού σας, βάζετε τα 12 πιρουνία σας στο αριστερό συρτάρι ενώ τοποθετείτε τα 12 μαχαίρια σας στο δεξί. Ο συγγάτοικός σας (που δεν συμφωνεί με την απόλυτη τάξη που προσπαθείτε να του επιβάλλετε), παίρνει τρία πιρουνία από το αριστερό συρτάρι και τα ρίχνει στο δεξί. Κατόπιν, παίρνει στην τύχη ένα κομμάτι (πιρουνί ή μαχαίρι) από το δεξί συρτάρι και το ρίχνει στο αριστερό.

Μετά από αυτή την πράξη εξέγερσης του συγγάτοικου σας, έρχεστε και επιλέγετε στην τύχη ένα κομμάτι από ένα τυχαίο συρτάρι. Δεδομένου ότι κρατάτε στο χέρι σας ένα μαχαίρι, ποια η πιθανότητα ότι ανοίξατε το αριστερό συρτάρι;

Υπόδειξη: Αρχικά κωδικοποιείτε τις καταστάσεις στα δύο συρτάρια ως εξής. Για το αριστερό: (12Π,0Μ), ενώ για το δεξί: (0Π,12Μ). Από αυτή την αρχική διάταξη (ρίζα του δένδρου), σχηματίστε το δένδρο για το πρόβλημα. Αφού το κάνετε, η λύση βασίζεται σε απλές εφαρμογές του θεωρήματος ολικής πιθανότητας και του κανόνα του Bayes.

Άσκηση 5. Έστω $A_1, \dots, A_n$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Ναδειχθεί ότι

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε το γεγονός ότι αν τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $A_1^c, \dots, A_n^c$.