ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2008 Ημερομηνία Παράδοσης: 8/10/2008

Άσκηση 1.
Ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι $\{H,T\}^3 = \{H,T\} \times \{H,T\} \times \{H,T\}$ και το μέγεθος του $|\{H,T\}^3| = 8$.
(α) Το γεγονός $\{HHH\}$ αποτελεί ένα μοναδικό αποτέλεσμα του δειγματοχώρου. Εφόσον τα νομίσματα είναι αμερόληπτα, τότε το δειγματοχώρος ακολουθεί τον κανόνα της ομοιόμορφης κατανομής, οπότε η ζητούμενη πιθανητα είναι $1/|\Omega| = 1/8$.
(β) Το γεγονός $\{HTH\}$ αποτελεί ένα μοναδικό αποτέλεσμα του δειγματοχώρου. Εφόσον τα νομίσματα είναι αμερόληπτα, τότε το δειγματοχώρος ακολουθεί τον κανόνα της ομοιόμορφης κατανομής, οπότε η ζητούμενη πιθανητα είναι $1/|\Omega| = 1/8$.
(γ) Το γεγονός να έρθουν δύο κορώνες και ένα γράμμα αποτελείται από το εξής αποτελέσματα $\{THH, HTH, HHT\}$. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $3/8$.
(δ) Το γεγονός αυτό μπορεί να εκφραστεί πιο ακριβές είτε ως δύο κορώνες και ένα νόμισμα με γράμματα, είτε τρεις κορώνες. Η πιθανότητα να έρθουν οι κορώνες και ένα γράμματα δίνεται από το υποερώτημα **(γ)**, ενώ η πιθανότητα να έχουμε τρεις κορώνες από το υποερώτημα **(α)**. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι το άθροισμα των δυο αυτών πιθανοτήτων, άρα $3/8 + 1/8 = 1/2$.

Άσκηση 2.
(α) Γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ και $P(A \cup B) \leq 1$. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &\leq 1 \\ P(A) + P(B) - P(A \cap B) &\leq 1 \\ P(A) + P(B) &\leq 1 + P(A \cap B) \\ P(A) + P(B) - 1 &\leq P(A \cap B) \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας τους κανόνες De Morgan έχουμε:

$$\begin{aligned} 1 - P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= P((A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c) \\ &= P(A_1^c \cup \cdot \cup A_n^c) \\ &\leq P(A_1^c) + \cdots + P(A_n^c) \\ &= (1 - P(A_1)) + \cdots + (1 - P(A_n)) \\ &= n - P(A_1) - \cdots - P(A_n) \end{aligned}$$

Άσκηση 3.
Για την γεωμετρική ερμηνεία των ζητούμενων πιθανοτήτων δείτε το σχήμα 1.

(1) $P(A) = 2\left(\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$.

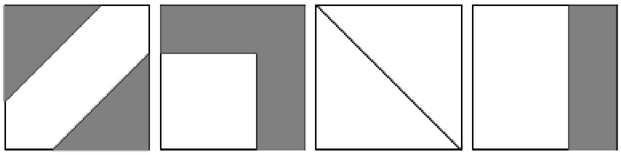
(2) $P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

(3) $P(A \cap B) = 2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

(4) $P(C) = 0$, εφόσον αύτο το γεγονός δεν έχει εμβδαδόν.

(5) $P(D) = \frac{1}{3}$.

(6) $P(A \cap D) = P(A \cap B)/2 = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$.



(a) A (b) B (c) C (d) D

Σχήμα 1: Η γεωμετρική ερμηνεία των πιθανοτήτων της άσκησης 3. Η γραμμοσκιασμένες περιοχές σε κάθε διάγραμμα αναπαραστά το αντίστοιχο γεγονός, όπου ο οριζόντιος άξονας είναι ο αριθμός του διάλεξε η Μαρία και ο κάθετος άξονας ο αριθμός που διάλεξε η Χριστίνα.

Άσκηση 4.
(α) Το ζητούμενο γεγονός είναι η ένωση του A και B, άρα η ζητούμενη πιθανοτητα είναι:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(β) Το ζητούμενο γεγονός μπορεί να εκφραστεί και ως 'Το A και όχι το B ή το B και όχι το A', δηλαδή σε $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$. Μπορεί επίσης να εκφραστεί και ώς $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$, όπου χρησιμοποιώντας την πιθανότητα από το ερώτημα **(α)** έχουμε ότι:
$P((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$.

Άσκηση 5.
Υπάρχουν οι δύο πιθανές ερμηνείες για το ζητούμενο ερώτημα, που οφείλονται στο αν θεωρήσουμε ότι ο δειγματοχώρος ορίζεται ως $\{1,2,3,4\}^2$, όπου η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα αποτελέσματα του κάθε ζαριού μετράει, δηλαδή το γεγονός $(2,3)$ είναι διαφορετικό του $(3,2)$, ή αν θεωρήσουμε ότι ο δειγματοχώρος ορίζεται ως $\{\{i,j\} | i,j \in \{1,2,3,4\}\}$, όπου η σειρά με την οποία εμφανίζονται τα αποτελέσματα του κάθε ζαριού δεν μετράει. Οι δύο περιπτώσεις είναι διαφορετικές μεταξύ τους, καθώς ο έμμεσος ορισμός του κανόνα πιθανοτήτων που προκύπτει από το δειγματοχώρο, διαφέρει όταν εφαρμόζεται σε κάθε περίπτωση (πιο συγκεκριμένα η σταθερά κανονικοποίησης υπολογίζεται διαφορετικά). Κάθε ερμηνεία είναι έγκυρη, και οι δύο δυνατές λύσεις παρουσιάζονται ακολούθως.

Υποθέτωντας $\Omega = \{1,2,3,4\}^2$
Το πρόβλημα ορίζει ότι οι πιθανότητα για κάποιο ζευγάρι (a,b) που ρίχνουμε είναι $P(\{(a,b)\}) = c \cdot a \cdot b$, για κάποια σταθερά c. Οι τιμές του $a \cdot b$ για όλα τα στοιχεία του δειγματοχώρου δίνονται από τον παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Για να βρούμε το νόμο πιθανοτήτων, πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία του παραπάνω πίνακα με την σταθερά κανονικοποίησης c. Για να υπολογίσουμε την σταθερά c χρησιμοποιούμε το αξίωμα της κανονικοποίησης που απαιτεί:

$$\sum_{a \in \{1,2,3,4\}} \sum_{b \in \{1,2,3,4\}} P(\{(a,b)\}) = 1$$

Οπότε έχουμε ότι $c = \frac{1}{\sum_a \sum_b a \cdot b} = \frac{1}{100}$. Συνεπώς ο νόμος πιθανοτήτων για κάθε υποσυνολο του δειγματοχώρου μπορεί να υπολογιστεί ως : $P(\{(a,b)\}) = \frac{a \cdot b}{100}$.

(α) $\frac{2+4+2+4+6+6+12+4+8+12+16}{100} = \frac{84}{100}$

(β) Το γεγονός είναι $\{(2,3) \cup (3,2)\}$, άρα $\frac{6}{100} + \frac{6}{100} = \frac{3}{25}$.

Υποθέτωντας $\Omega = \{\{i, j\} | i, j \in \{1, 2, 3, 4\}\}$
Το πρόβλημα ορίζει ότι η πιθανότητα για κάθε στοιχείο του δειγματοχώρου είναι $P(\{\{a, b\}\}) = c \cdot a \cdot b$ για κάποια σταθερά c. Οι τιμές $a \cdot b$ για όλα τα στοιχεία του δειγματοχώρου δίνονται από το παρακάτω πίνακα:

	1	2	3	4
1	1			
2	2	4		
3	3	6	9	
4	4	8	12	16

Παρατηρήστε ότι ο πίνακας έχει τριγωνική μορφή. Για να βρούμε τον πιθανοτικό νόμο, χρειάζεται να υπολογίσουμε την σταθερά c. Για να υπολογίσουμε την σταθερά c χρησιμοποιούμε το αξίωμα της κανονικοποίησης, που απαιτεί:

$$\sum_{a \in \{1,2,3,4\}} \sum_{b \leq a} P(\{\{a, b\}\}) = 1$$

Συνεπώς $c = 65$ και ο νόμος πιθανοτήτων για κάθε υποσυνολο του δειγματοχώρου μπορεί να υπολογιστεί ως : $P(\{\{a, b\}\}) = \frac{a \cdot b}{65}$.

(α) $\frac{2+4+6+4+8+12+16}{65} = \frac{52}{65}$

(β) $\frac{6}{65}$.

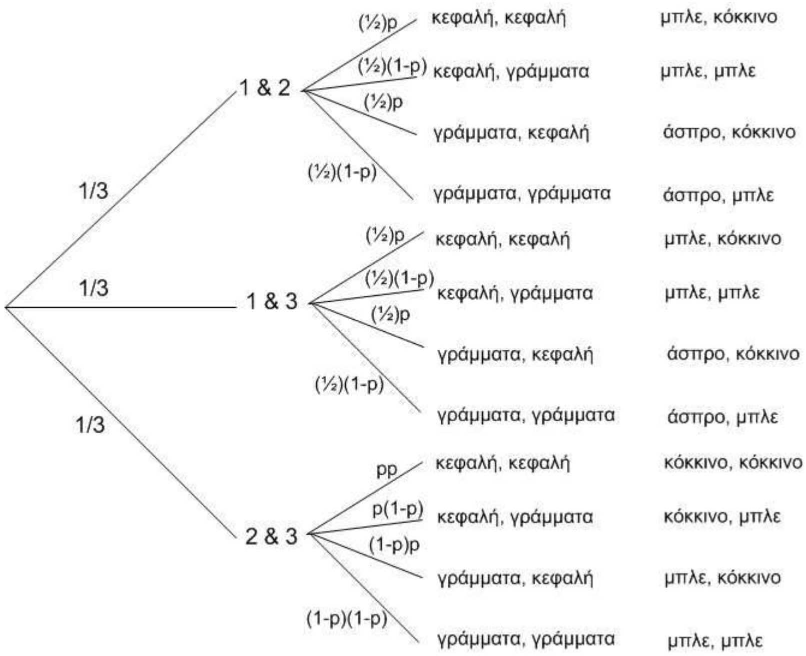
Άσκηση 6.

(α) Το πείραμα θεωρούμε ότι γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται η επιλογή των δύο κερμάτων, ενώ στη δεύτερη φάση γίνεται το ρίξιμο αυτών. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή δύο κερμάτων από ένα σύνολο τριών: επιλέγουμε το πρώτο και το δεύτερο ή το πρώτο και το τρίτο ή το δεύτερο και το τρίτο. Καθένα από αυτά τα ζευγάρια έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής. Επίσης, για κάθε ζευγάρι κερμάτων υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα ρίψεων: (κεφαλή, κεφαλή), (κεφαλή, γράμματα), (γράμματα, κεφαλή), (γράμματα, γράμματα). Άρα, ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 2.

(β) Η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά τη ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι:

$$\begin{aligned} P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) &= P((\text{μπλε,μπλε})) + P((\text{κόκκινο,κόκκινο})) \\ &= \frac{1}{3}\Big\{\frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) + p^2 + (1-p)^2\Big\} \\ &= \frac{1}{3}(2p^2 - 3p + 2) \end{aligned}$$

Όμως, $P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) = 29/96$.
Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $(1/3)(2p^2 - 3p + 2) = 29/96$, βρίσκουμε ότι $p = 5/8$ ή $p = 7/8$.



Σχήμα 2: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος 2.(α)