

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2008
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/10/2008

Ημερομηνία Παράδοσης: 8/10/2008

Άσκηση 1. Ρίχνουμε μαζί τρία όμοια, αμερόληπτα νομίσματα. Ορίστε το δειγματοχώρο του πειράματος. Χρησιμοποιείστε τους ακόλουθους συμβολισμούς για το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος: $\{H\}$ = κορώνα και $\{T\}$ = γράμματα. Υπολογίστε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

- (α) $\{HHH\}$, δηλαδή έρχονται τρεις κορώνες.
- (β) $\{HTH\}$.
- (γ) Έρχονται δύο κορώνες και ένα γράμμα.
- (δ) Έρχονται περισσότερες κορώνες από γράμματα.

Άσκηση 2. Ανισότητα του Bonferroni.

- (α) Δείξτε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

- (β) Γενικεύσατε την ανισότητα για την περίπτωση n ενδεχομένων $A_1, A_2, \dots, A_n$ αποδεικνύοντας ότι:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n - 1).$$

Υπόδειξη: Για το (β), χρησιμοποιείστε τους νόμους του de Morgan.

Άσκηση 3. Η Μαρία και η Χριστίνα διαλέγουν τυχαία η κάθε μία έναν αριθμό μεταξύ του μηδενός και του 1 σύμφωνα με τον ομοιόμορφο πιθανοτικό νόμο. Θεωρείστε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

- A = {Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη από $1/3$.}
- B = {Τουλάχιστον ένας από τους 2 αριθμούς είναι μεγαλύτερος από $2/3$.}
- C = {Το άθροισμα των δύο αριθμών είναι 1.}
- D = {Ο αριθμός της Μαρίας είναι μεγαλύτερος από $2/3$.}

Υπολογίστε τις πιθανότητες: $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(C)$, $P(D)$, $P(A \cap D)$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε γραφικές παραστάσεις για να παραστήσετε τα ενδεχόμενα. Ο υπολογισμός των πιθανοτήτων ανάγεται σε υπολογισμό εμβαδών...

Άσκηση 4. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματοχώρου, υπολογίστε ως συνάρτηση των πιθανοτήτων $P(A)$, $P(B)$, και $P(A \cap B)$ τις πιθανότητες των ακόλουθων ενδεχομένων:

- (α) Τουλάχιστον ένα από τα A και B συμβαίνει.
- (β) Ακριβώς μόνο ένα από τα A και B συμβαίνει.

Άσκηση 5. Ο Γιάννης έχει ένα ζευγάρι από "πειραγμένα" τετράεδρα ζάρια. Σε κάθε ρίψη, η πιθανότητα να φέρει ένα οποιοδήποτε ζεύγος είναι ανάλογη του γινομένου των δύο αριθμών που έφεραν τα ζάρια.

- (α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο του πειράματος.
- (β) Ποια η πιθανότητα το γινόμενο να είναι ζυγός αριθμός;
- (γ) Ποια η πιθανότητα να φέρει το ένα ζάρι 2 και το άλλο 3;

Άσκηση 6. Μας δίνονται τρία νομίσματα. Το πρώτο είναι ένα αμερόληπτο κέρμα και είναι βαμμένο μπλε στην κεφαλή (Κ) και άσπρο στα γράμματα (Γ). Τα άλλα δύο νομίσματα δεν είναι αμερόληπτα και έχουν πιθανότητα να έρθει κεφαλή ίση με p . Είναι βαμμένα κόκκινο στην κεφαλή και μπλε στα γράμματα. Διαλέγουμε τυχαία δύο από τα τρία νομίσματα και τα ρίχνουμε.

- (α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος.
- (β) Υπολογίστηκε εμπειρικά ότι η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά την ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι $29/96$. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το p ;