Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Προόδου
Διδάσκων: Π.Τσακαλίδης
1 Δεκεμβρίου 2007 – Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1

(α) **(i)** Σωστό : $P(E^c \cup F^c) = P((EF)^c) = 1 - P(EF)$

(ii) Σωστό : $1 - P(E^c|F^c)P(F^c) = 1 - P(E^cF^c) = 1 - P((E \cup F)^c) = P(E \cup F)$

(iii) Λάθος : Αν τα E και F είναι ανεξάρτητα, τότε:
$P(E|F^c) + P(E|F) = P(E) + P(E) = 2P(E)$ που δεν μπορεί να ισούται με 1 για κάθε E.

(iv) Λάθος:

$$\left.\begin{array}{l} P(EF|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} \\ P(EF|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \end{array}\right\} \text{Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } P(E) = P(F).$$

(v) Σωστό:Αυτό είναι απλά το θεώρημα ολικής πιθανότητας για το γεγονός E δεδομένου του F.

(vi) Σωστό: $P(E|F)P(F) + P(E^c|F)P(F) = P(EF) + P(E^cF) = P(EF \cup E^cF) = P(F)$.

(vii) Λάθος: Απαιτείται τα E, F, G να είναι και ανά δύο ανεξάρτητα.

(viii) Λάθος: $P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = 0$, αφού $P(EF) = 0$ (E, F ξένα).

(β) Μας ζητείται να συγκρίνουμε τις πιθανότητες $P(A|B^c)$ και $P(A)$. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$

Επομένως,

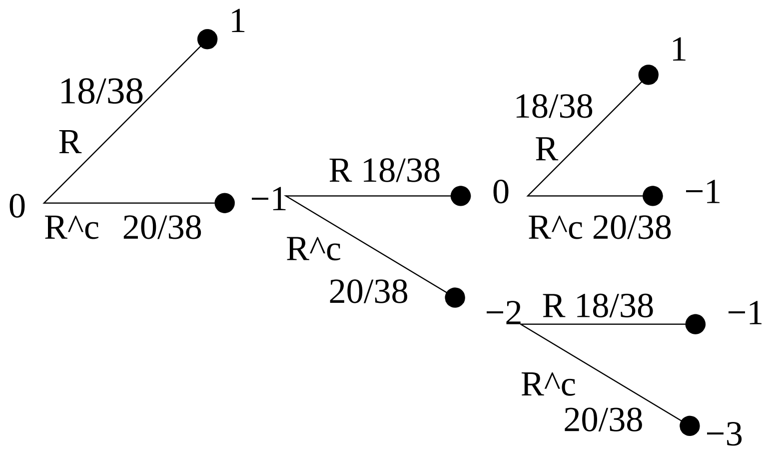
$$\begin{aligned} P(A|B^c) &= \frac{P(A) - P(A|B)P(B)}{P(B^c)} \\ &\leq \frac{P(A) - P(A)P(B)}{P(B^c)}, \text{ αφού } P(A|B) > P(A) \\ &= \frac{P(A)(1 - P(B))}{P(B^c)} \\ &= P(A) \end{aligned}$$

Συνεπώς, $P(A|B^c) \leq P(A)$, δηλαδή η γνώση ότι το γεγονός B *δεν* συνέβη μειώνει την πιθανότητα να είναι ένοχος ο κατηγορούμενος.

Θέμα 2

(α) Έστω το γεγονός R έρχεται κόκκινο και R^c δεν έρχεται κόκκινο, με πιθανότητες $P(R) = 18/38$ και $P(R^c) = 20/38$ αντίστοιχα. Τότε το δενδρικό διάγραμμα του πειράματος φαίνεται στο σχήμα 1 και ο ζητούμενος πίνακας είναι ο εξής:

Ω	R	R^cRR	R^cRR^c	R^cR^cR	$R^cR^cR^c$
$X_{(\$)}$	1	1	-1	-1	-3
$p_X(x)$	$\frac{18}{38}$	$\frac{20}{38}\frac{18}{38}\frac{18}{38}$	$\frac{20}{38}\frac{18}{38}\frac{20}{38}$	$\frac{20}{38}\frac{20}{38}\frac{18}{38}$	$\frac{20}{38}\frac{20}{38}\frac{20}{38}$



Σχήμα 1: Το δενδρικό διάγραμμα του θέματος 2.

Επομένως, το πεδίο τιμών της τ.μ. X είναι: $\{-1, -3, 1\}$ και η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{18}{38} \left(\frac{20}{38}\right)^2 = 0.2624 & , \ x = -1 \\ \left(\frac{20}{38}\right)^3 = 0.1458 & , \ x = -3 \\ \frac{18}{38} + \frac{20}{38} \left(\frac{18}{38}\right)^2 = 0.5918 & , \ x = 1 \end{cases}$$

(β) $P(X > 0) = P(X = 1) = 0.5918$, δηλαδή έχουμε πιθανότητα μεγαλύτερη από 50% να κερδίσουμε.

(γ) $E[X] = (-1) \cdot 0.2624 + (-3) \cdot 0.1458 + 1 \cdot 0.5918 = -0.108$ που μας λέει ότι κατά μέσο όρο χάνουμε περίπου 11 σεντ όταν παίζουμε το παιχνίδι.

(δ) Τελικά βλέπουμε ότι η στρατηγική που μας προτείνει ο φίλος μας δεν είναι και πολύ καλή.

Θέμα 3

(α) Καθώς πρέπει να ρίξουμε το νόμισμα τουλάχιστον 2 φορές για να έρθουν 2 Κ και μπορεί να χρειαστεί να το ρίξουμε άπειρες φορές και να μην έρχεται το Κ, συμπεραίνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή Ν παίρνει τιμές $\{2, 3, 4, \ldots\}$. Το γεγονός $\{N = n\}$ συμβαίνει μόνο αν σε $n-1$ ρίψεις εμφανιστεί 1 φορά το Κ (και επομένως $n-2$ φορές του Γ) και στην ρίψη n εμφανιστεί το Κ. Άρα:

$$\begin{aligned} p_N(n) &= P(N = n) = \binom{n-1}{1} p(1-p)^{n-2} \cdot p, \ n = 2, 3, \ldots \\ &= (n-1)p^2(1-p)^{n-2}, \ n = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια η Ν ακολουθεί Pascal κατανομή με $r = 2$ (Σημειώσεις σελίδα 51).

(β) Για την διωνυμική κατανομή έχουμε δείξει ότι:

$$E[X] = np \text{ και } var(X) = np(1-p)$$

. Συνεπώς, $6 = np$ και $2.4 = np(1-p)$ άρα $p = 0.6$ και $n = 10$. Οπότε:

(i) $P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.6^5 \cdot 0.4^5 = 0.2007$.

(ii) $P(2X \geq 5) = P(X \geq 2.5) = \sum_{k=3}^{10} \binom{10}{k} 0.6^k \cdot 0.4^{10-k} = 0.9877$

(iii) $var(3x - 2) = 9var(X) = 9 \cdot 2.4 = 21.6$

Θέμα 4

(α) Πρέπει

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} p_{xy}(x,y) &= 1 \Rightarrow \\
c+c+2c+2c+0+4c+3c+c+6c &= 1 \Rightarrow \\
20c &= 1 \Rightarrow \\
c &= \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

.

(β)

$$p_Y(2) = \sum_{x=1}^{3} p_{X,Y}(x,2) = 2c + 0 + 4c = 6c = \frac{3}{10}$$

.

(γ) Το πεδίο τιμών της Z είναι $\{1,4,9,2,18,3,12,27\}$ και η συνάρτηση πιθανότητας της είναι:

z	1	2	3	4	9	12	18	27
$p_Z(z)$	3/20	2/20	1/20	1/20	6/20	1/20	4/20	2/20

(δ)

$$p_{X|Y}(x|2) = \frac{P_{X,Y}(x,2)}{P_Y(2)} = \begin{cases} \frac{2c}{6c} = \frac{1}{3} & , \ x=1 \\ \frac{4c}{6c} = \frac{2}{3} & , \ x=3 \\ 0 & , \ \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
E[Z|Y=2] &= E[YX^2|Y=2] \\
&= E[2X^2|Y=2] \\
&= 2E[X^2|Y=2] \\
&= 2\sum_{x=1}^{3} x^2 p_{X|Y}(x|2) \\
&= 2\left(1^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{38}{3}
\end{aligned}$$

(ε) Έχουμε ότι $p_X(2) = \sum_{y=1}^{3} p_{X,Y}(2,y) = c + 0 + c = 2c = 2/10$.

$$p_{Y|X}(y|2) = \frac{P_{X,Y}(2,y)}{P_X(2)} = \begin{cases} \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} & , \ y=1 \\ \frac{c}{2c} = \frac{1}{2} & , \ y=3 \\ 0 & , \ \text{αλλού} \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε την δεσμευμένη διασπορά χρειαζόμαστε:

$$E[Y^2|X=2] = \sum_{y=1}^{3} y^2 \cdot p_{Y|X}(y|2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$E[Y|X=2] = \sum_{y=1}^{3} y \cdot p_{Y|X}(y|2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Άρα:

$$var(Y|X=2) = E[Y^2|X=2] - (E[Y|X=2])^2 = 5 - 2^2 = 1.$$