

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
1 Δεκεμβρίου 2007 - Διάρκεια: 2.5 Ώρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες: Βασικές έννοιες.

(α) Έστω E , F και G τρία γεγονότα με μη μηδενικές πιθανότητες, ορισμένα σε κάποιο κοινό δειγματοχώρο. Αποφασίστε εάν οι επόμενες προτάσεις είναι πάντα ορθές (για οποιαδήποτε E , F και G) και αιτολογείστε την απάντησή σας.

(i) $P(EF) + P(E^c \cup F^c) = 1$.

(ii) $P(E \cup F) = 1 - P(E^c/F^c)P(F^c)$.

(iii) $P(E/F^c) + P(E/F) = 1$.

(iv) $P(EF/E) = P(EF/F)$.

(v) $P(E/F) = P(E/FG)P(G/F) + P(E/FG^c)P(G^c/F)$.

(vi) $P(E/F)P(F) + P(E^c/F)P(F) = P(F)$.

(vii) Αν $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$, τότε τα E , F , G , είναι ανεξάρτητα.

(viii) Αν τα E και F είναι ξένα μεταξύ τους, $P(E/F) = P(E)$.

(b) Αποχρώσα Ένδειξη: Έστω ότι το συμβάν B αυξάνει την πιθανότητα ένας κατηγορούμενος να είναι όντως ένοχος. Δηλαδή, αν A είναι το γεγονός "ο κατηγορούμενος είναι ένοχος," τότε $P(A/B) \geq P(A)$. Ο εισαγγελέας μαθαίνει ότι το γεγονός B δεν συνέβη. Τι συμπέρασμα μπορεί να βγάλει σχετικά με τη δεσμευμένη πιθανότητα να είναι ένοχος ο κατηγορούμενος;

Θέμα 2 - 25 μονάδες: Ένα απλό σειριακό πείραμα τύχης.

Πριν αναχωρήσετε για το Las Vegas, ένας φίλος σας εισηγείται την ακόλουθη "σίγουρη" συνταγή για να κερδίσετε στη ρουλέτα: "Πόνταρε πρώτα \$1 στο κόκκινο. Αν έρθει κόκκινο (συμβαίνει με πιθανότητα 18/38), πάρε το κέρδος σου (\$1) και φύγε. Αν έρθει μαύρο και χάσεις (με πιθανότητα 20/38), βάλε από \$1 στο κόκκινο σε κάθε ένα από τα επόμενα δύο γυρίσματα του τροχού και μετά φύγε."

(α) Ορίζουμε την τ.μ. X ως το συνολικό κέρδος σας. Προφανώς αρνητικές τιμές της X δηλώνουν χάσιμο. Δημιουργείστε το δένδρικό διάγραμμα για αυτό το πείραμα τύχης και περιγράψτε πλήρως την τ.μ. X (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας). Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

Ω					
X					
$p_X(x)$					

(β) Ποια η πιθανότητα να κερδίσετε, $P(X > 0)$;

(γ) Ποιο το αναμενόμενο κέρδος σας, $E[X]$;

(δ) Είναι καλή η στρατηγική που σας προτείνει ο φίλος σας;

Θέμα 3 - 25 μονάδες: Δοκιμές Bernoulli και συναφείς κατανομές

(α) Σε ένα πείραμα τύχης, ρίχνουμε διαδοχικά ένα "πειραγμένο" κέρμα (όπου η πιθανότητα να έρθει Κ σε κάθε ρίψη είναι p) έως ότου φέρουμε Κ για δεύτερη φορά. Έστω N η τ.μ. που μετρά των αριθμό των ρίψεων μέχρι τη δεύτερη εμφάνιση κεφαλής, Κ. Δηλαδή, αν οι ρίψεις φέρουν Γ-Γ-Κ-Γ-Γ-Κ, τότε $N = 7$. Δώστε την πλήρη περιγραφή για την τ.μ. N (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).

(β) Η τ.μ. X ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή με μέση τιμή $E[X] = 6$ και διασπορά $var(X) = 2.4$. Υπολογίστε τις εξής ποσότητες: (i) $P(X = 5)$, (ii) $P(2X \geq 5)$, (iii) $var(3X - 2)$.

Θέμα 4 - 25 μονάδες: Από κοινού συναρτήσεις πιθανότητας.

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c .

(β) Υπολογίστε την τιμή $p_Y(2)$.

(γ) Θεωρείστε την τ.μ. $Z = YX^2$. Υπολογίστε τη σ.π. της Z .

(δ) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. X δεδομένου του γεγονότος $\{Y = 2\}$, δηλαδή την $p_{X/Y}(x/2)$. Βρείτε την $E[Z/Y = 2]$.

(ε) Υπολογίστε την δεσμευμένη διασπορά της Y δεδομένου του γεγονότος $\{X = 2\}$.