

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ217 - Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Τελικής Εξέτασης
Διδάσκων: Π.Τσακαλίδης
17 Σεπτεμβρίου 2008 – Διάρκεια: 3 Ώρες

Λύσεις

Θέμα 1

Οι εκ των προτέρων πιθανότητες για τις ασθένειες δίδονται από την εκφώνηση $P(d_i) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$. Έστω T το γεγονός ότι το τεστ είναι θετικό. Οι δεσμευμένες πιθανότητες του T δεδομένης της ασθένειας d_i είναι:

$$P(T|d_1) = 0.8, P(T|d_2) = 0.6, P(T|d_3) = 0.4$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes βρίσκουμε τις ζητούμενες εκ των υστέρων πιθανότητες:

$$P(d_i|T) = \frac{P(T|d_i) \cdot P(d_i)}{\sum_{k=1}^3 P(T|d_k) \cdot P(d_k)}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} P(d_1|T) &= \frac{4}{9} \\ P(d_2|T) &= \frac{1}{3} \\ P(d_3|T) &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Θέμα 2.

- (α)** Η περιοχή όπου η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι c φαίνεται στο Σχήμα (1). Πρόκειται για ένα τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 1. Για την σταθερά c πρέπει,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int f_{xy}(x, y) dx dy = 1,$$

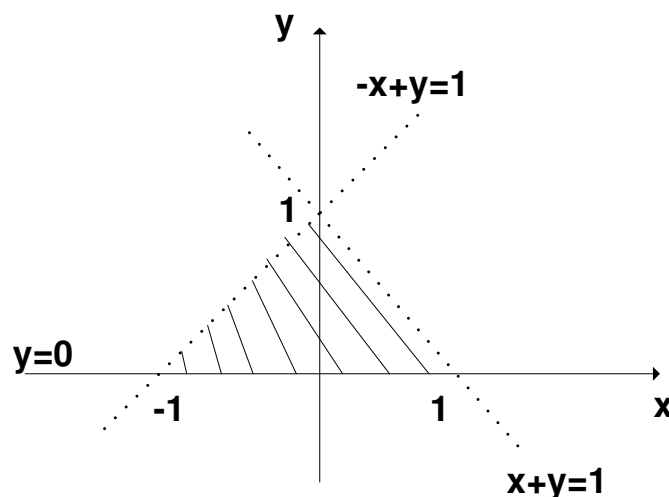
ή

$$c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1,$$

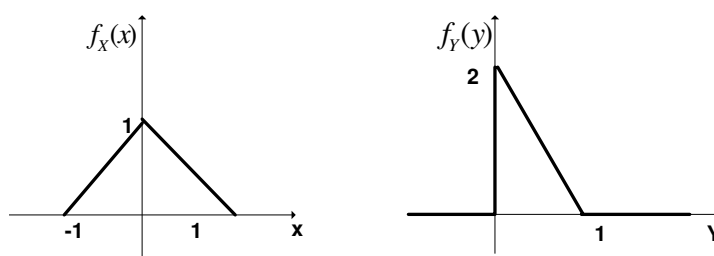
ή

$$c = 1,$$

όπου το γινόμενο $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.



Σχήμα 1: 2(a,i)



Σχήμα 2: 2(a,ii)

Γενικά ισχύει ότι $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy$. Από το Σχήμα (1) φαίνεται ότι,

- Για $-1 \leq x \leq 0$, $f_X(x) = \int_0^{1+x} c dy = 1 + x$
- Για $0 \leq x \leq 1$, $f_X(x) = \int_0^{1-x} c dy = 1 - x$.

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως για $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_{y-1}^{1-y} c dx = 2(1-y)$. Δηλαδή,

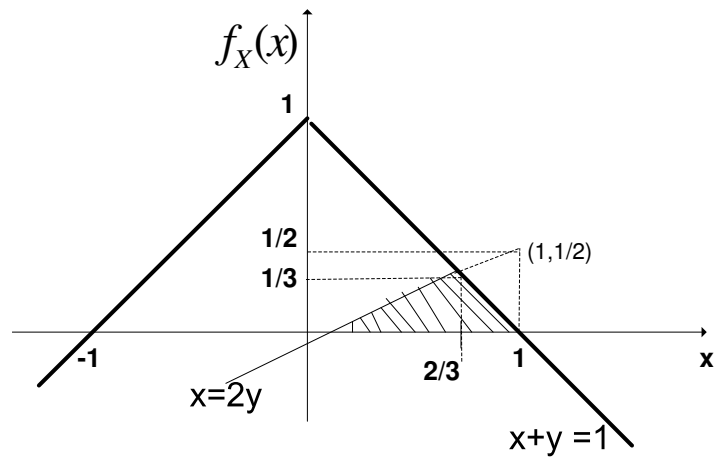
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού.} \end{cases}$$

Προφανώς, Σχήμα (2), $f_{XY}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ και οι τυχαίες μεταβλητές XY δεν είναι ανεξάρτητες.

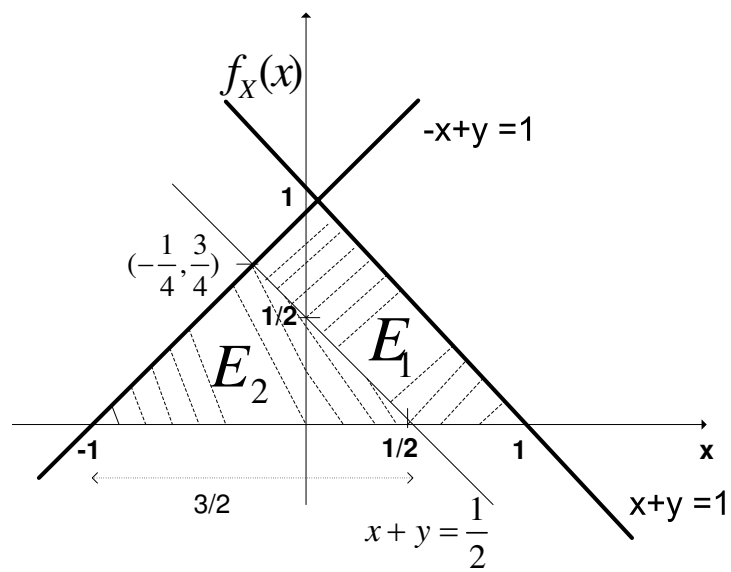
- (β) Απαντάται πολύ εύκολα παρατηρώντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος (3). Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο με βάση $(0, 1)$ και ύψος $\frac{1}{3}$ στο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ισούται με την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$. Άρα, $P(X \geq 2Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

- (γ) Ομοίως από το Σχήμα (4) έχουμε ότι,

$$P(X + Y) \geq \frac{1}{2} = c \cdot E_1 = c \cdot (E - E_2) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{7}{16}.$$



Σχήμα 3: 2(β)



Σχήμα 4: 2(γ)

(δ)

$$f_{\frac{X}{Y}}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2(1-y)}, \quad |x| \leq 1-y, \quad 0 < y < 1,$$

$$f_{\frac{Y}{X}}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-|x|}, \quad 0 < y < 1-|x|, \quad |x| \leq 1.$$

Θέμα 3

(α) Σωστό: Δεδομένης μιας τιμής x της τυχαίας μεταβλητής X (δηλαδή δεδομένου του γεγονότος $X = x$), η τυχαία μεταβλητή $Z = x + Y$ είναι κανονική με μέση τιμή x και διασπορά 1.

$$f_{Z|X}(z|x) = N(x, 1)$$

(β) Λάθος: $\text{var}(Z) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$, αφού οι X και Y είναι ανεξάρτητες. Αλλά $\text{var}(X) = 1$ και $\text{var}(Y) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}$, επομένως: $\text{var}(Z) = 1 + \frac{1}{12} \neq 2$.

(γ) Λάθος: Η Q είναι ομοιόμορφη κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$, συνεπώς η δεσμευμένη μέση τιμή της δεν μπορεί να είναι αρνητική.

(δ) Σωστό: Έχουμε $\text{cov}(X, Z) = E[XZ] - E[X]E[Z]$. Αλλά $Z = X + Y$. Τότε:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Z) &= E[X(X+Y)] - E[X]E[X+Y] \\ &= E[X^2] + E[XY] - (E[X])^2 - E[X]E[Y] \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 + E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= \text{var}(X) + \text{cov}(X, Y) \\ &= \text{var}(X) \end{aligned}$$

αφού $\text{cov}(X, Y) = 0$, καθώς X και Y είναι ανεξάρτητες.

(ε) Σωστό: Αφού $Z = X + Y$:

$$\begin{aligned} E[Z|Z] &= E[X+Y|Z] \\ E[Z|Z] &= E[X|Z] + E[Y|Z] \\ Z &= E[X|Z] + E[Y|Z] \end{aligned}$$

Θέμα 4

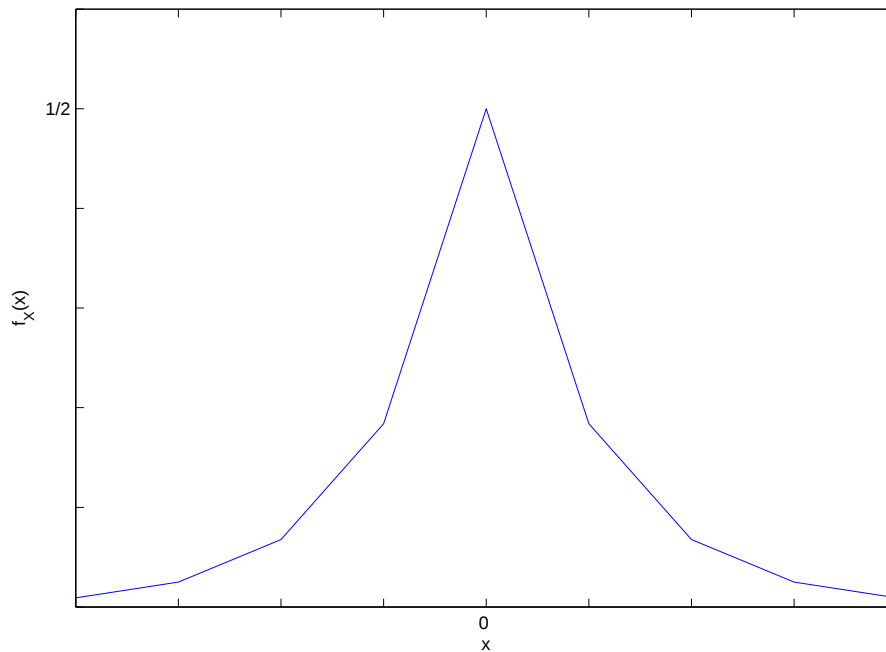
(α) Από το σχήμα είναι προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[-a, a]$. Συνεπώς $P(Y < -a) = 0$. Επίσης $\{Y \leq -a\} \equiv \{Y = -a\} = \{X \leq -1\}$. Επομένως:

$$P(Y \leq -a) = P(X \leq -1) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{2} e^x dx = \frac{1}{2} e^{-1}$$

(β) Η γραφική παράσταση για την τυχαία μεταβλητή X με Laplacian συνάρτηση πυκνότητας, όπως δίνεται από την εκφώνηση φαίνεται στο σχήμα 5.

- Για $y < -a$ έχουμε $F_Y(y) = 0$
- Για $y \geq a$ έχουμε $F_Y(y) = 1$
- Για $-a \leq y < 0$, $x = \frac{y}{a}$ έχουμε:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y/a) = \int_{-\infty}^{y/a} \frac{1}{2} e^x dx = \frac{1}{2} e^{y/a}$$



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση για την τυχαία μεταβλητή X με Laplacian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, όπως δίνεται από την εκφώνηση, για το θέμα 4.

- Για $0 \leq y < a$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X \leq y/a) = \int_{-\infty}^{y/a} \frac{1}{2} e^x dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} e^x dx + \int_0^{y/a} \frac{1}{2} e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} e^{-x} \right]_0^{y/a} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-y/a} + \frac{1}{2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} e^{-y/a}
 \end{aligned}$$

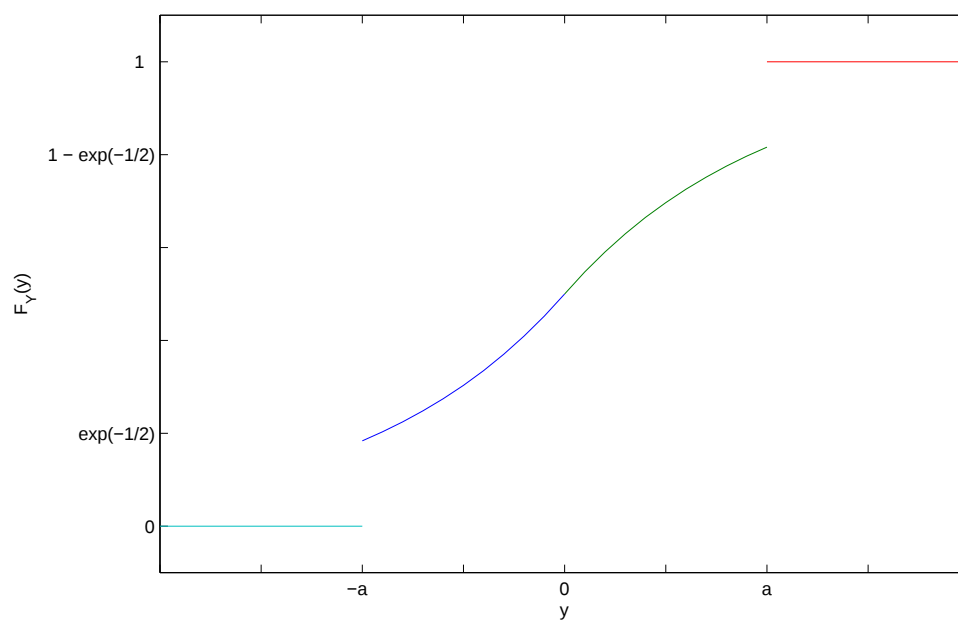
Επομένως:

$$E_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -a \\ \frac{1}{2} e^{y/a}, & -a \leq y < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-y/a}, & 0 \leq y < a \\ 1, & y \geq a \end{cases}$$

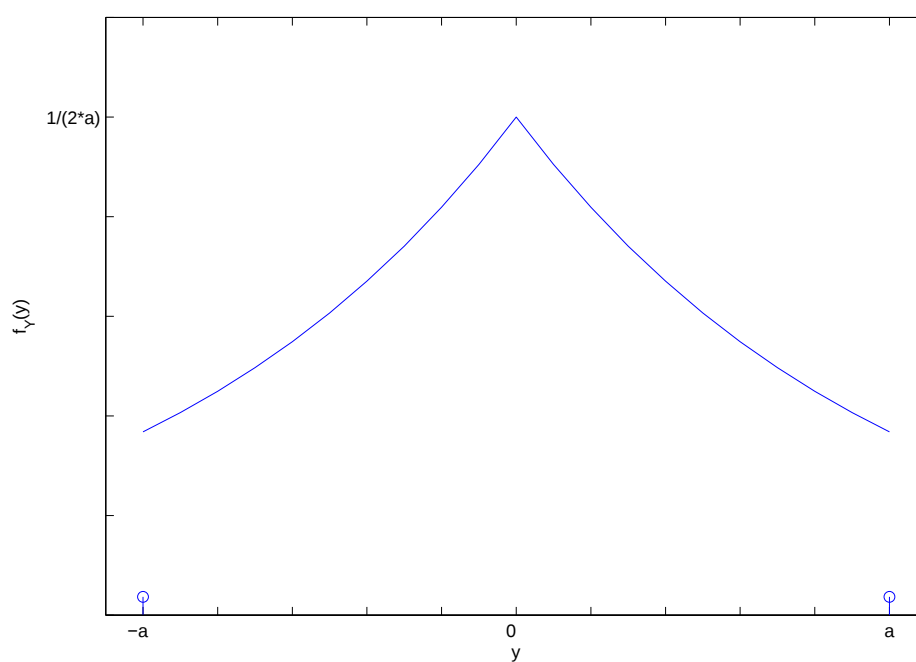
Η γραφική παράσταση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για την τυχαία μεταβλητή Y φαίνεται στο σχήμα 6. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή Y είναι:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2a} e^{-|y|/a}, & |y| < a \\ \frac{1}{2a} \delta(y+a), & y = -a \\ \frac{1}{2a} \delta(y-a), & y = a \end{cases}$$

και η γραφική παράσταση της φαίνεται στο σχήμα 7. Άρα η Y είναι μικτή τυχαία μεταβλητή.



Σχήμα 6: Η γραφική παράσταση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής για την τυχαία μεταβλητή Y για το θέμα 4.



Σχήμα 7: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για την τυχαία μεταβλητή Y για το θέμα 4.