

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 20 μονάδες. Κανόνας του Bayes.

Ένας γιατρός υποθέτει ότι ο ασθενής του πάσχει από μία εκ των τριών δυνατών ασθενειών d_1 , d_2 , ή d_3 . Πριν κάνει οποιοδήποτε τεστ, ο γιατρός υποθέτει ίσες πιθανότητες για τις 3 ασθένειες. Πραγματοποιεί ένα τεστ το οποίο είναι θετικό με πιθανότητα: 0.8 εάν ο ασθενής πάσχει από την ασθένεια d_1 , 0.6 εάν ο ασθενής πάσχει από την ασθένεια d_2 , και 0.4 εάν ο ασθενής πάσχει από την ασθένεια d_3 . Δεδομένου ότι το τεστ βγαίνει θετικό, ποιες είναι οι (εκ των υστέρων) πιθανότητες τις οποίες ο γιατρός μπορεί να εκχωρήσει στις τρεις ασθένειες;

Θέμα 2 - 30 μονάδες. Βασικές Έννοιες Κατανομών.

Δύο συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & y \geq 0, \quad |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. Υπολογίστε τη σταθερά c και τις περιθωριακές σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Δώστε τη γραφική παράσταση των δύο σ.π.π. Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X \geq 2Y\}$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X + Y \geq \frac{1}{2}\}$.

(δ) Υπολογίστε τις δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X/Y}(x/y)$ και $f_{Y/X}(y/x)$.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Άθροισμα Ανεξάρτητων Τυχαίων Μεταβλητών.

Έστω δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές: η Y είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά 1, δηλαδή, $Y \sim N(0, 1)$. Η X είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή, $X \sim U[0, 1]$. Ορίζουμε την τ.μ. $Z = X + Y$. Για τις ακόλουθες 5 προτάσεις αποφασίστε αν είναι σωστές ή λανθασμένες. Αιτιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας.

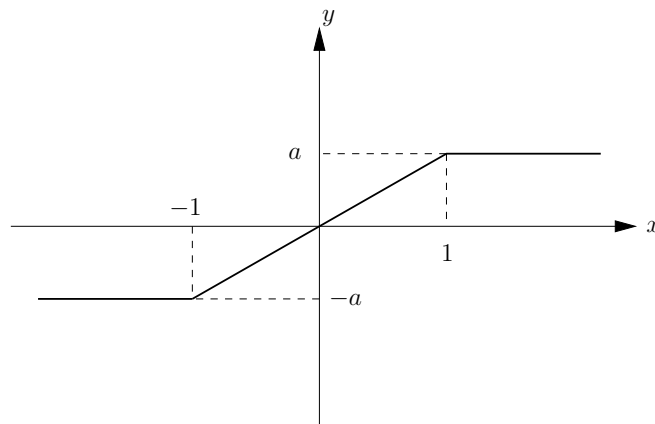
- (α) Η δεσμευμένη σ.π.π. της Z δεδομένης της X , $f_{Z|X}(z|x)$, είναι κανονική με μέση τιμή x και διασπορά 1.
- (β) $\text{var}(Z) = 2$.
- (γ) $E[X|Z = -1] = -1$.
- (δ) $\text{cov}(X, Z) = \text{var}(X)$.
- (ε) $Z = E[X|Z] + E[Y|Z]$.

Θέμα 4 - 30 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

Η είσοδος σε έναν ενισχυτή, με χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου όπως φαίνεται στο σχήμα 1, είναι μία τ.μ. X με Laplacian συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

- (α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των γεγονότων $\{Y < -a\}$ και $\{Y \leq -a\}$.
- (β) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) και την σ.π.π. της τ.μ. Y , δηλαδή της εξόδου του ενισχυτή. Δώστε τις γραφικές τους παραστάσεις. Τι είδους τ.μ. είναι η Y , διακριτή, συνεχής ή μικτή;



Σχήμα 1: Θέμα 4. Χαρακτηριστική εισόδου-εξόδου ενισχυτή.