Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Τελικής Εξέτασης
Διδάσκων: Π.Τσακαλίδης
22 Ιανουαρίου 2008 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1

(α) Η μέση τιμή της X είναι:

$$\mathbf{E}[X] = \frac{4-0}{10}\cdot 0 + \frac{4-1}{10}\cdot 1 + \frac{4-2}{10}\cdot 2 + \frac{4-3}{10}\cdot 3 = 1.$$

Για να υπολογίζουμε την διασπορά αρκεί να υπολογίζουμε την δεύτερη ροπή της X:

$$\mathbf{E}[X^2] = \frac{4-0}{10}\cdot 0^2 + \frac{4-1}{10}\cdot 1^2 + \frac{4-2}{10}\cdot 2^2 + \frac{4-3}{10}\cdot 3^2 = 2$$

Άρα:

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E^2}[X] = 1.$$

(β) Η τυχαία μεταβλητή Y μπορεί να εκφραστεί σαν το άθροισμα $2\cdot 10^8$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$ με την ίδια κατανομή $p_X(x)$:

$$Y = \sum_{i=1}^{2\cdot 10^8} X_i.$$

Επομένως:

$$\mathbf{E}[Y] = 2\cdot 10^8 \cdot \mathbf{E}[X] = 2\cdot 10^8.$$

(γ) Έστω R το γεγονός ότι το λειτουργικό σύστημα επανεγκαθήσταται σε ένα συγκεκριμένο υπολογιστή. Τότε:

$$\begin{aligned}
P(R) &= \sum_{k=0}^{3} P(R|X=k)\cdot P_x(k) \\
&= \sum_{k=0}^{3} (1-2^{-k})\cdot \frac{4-k}{10} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{10} + \frac{7}{8}\cdot\frac{1}{10} \\
&= \frac{31}{80} = 0.3875
\end{aligned}$$

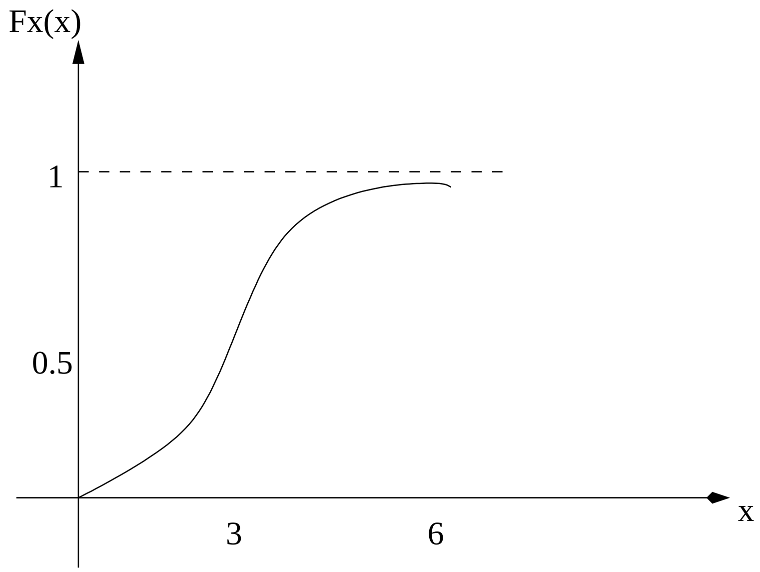
(δ)

$$\begin{aligned}
P(X=k|R) &= \frac{P(R|X=k)\cdot P_x(k)}{P(R)} \\
&= \frac{8(1-2^{-k})(4-k)}{31}, k = 0,1,2,3.
\end{aligned}$$

Θέμα 2

(α) Προφανώς θα πρέπει $c > 0$ (ώστε $f_X(x) \geq 0, \forall x$). Επίσης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_0^3 xdx + c\int_3^6 (6-x)dx = 1$$
$$c\frac{1}{2}x^2|_0^3 + c(6x - \frac{1}{2}x^2)|_3^6 = 1 \Rightarrow 9c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$



Σχήμα 1: Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για το ερώτημα (β) θέμα 2.

(β) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές είναι $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$. Συνεπώς:

- $x < 0 : F_X(x) = 0$
- $0 \leq x < 3 : F_X(x) = \frac{1}{9}\int_0^3 udu = \frac{x^2}{18}$
- $3 \leq x < 6 : F_X(x) = \frac{1}{9}\int_0^3 udu + \frac{1}{9}\int_3^6 (6-u)du = 1 - \frac{(6-x)^2}{18}$
- $x \geq 6 : F_X(x) = 1$

(γ) Εφόσον ο αριθμός των κομματιών που πουλάει η Dell μέσα σε μια μέρα μετριέται σε χιλιάδες κομμάτια, τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι οι εξής:

$$P(A) = P(X > 3) = 1 - F_X(3) = 0.5$$

και

$$P(B) = P(1.5 \leq X \leq 9) = F_X(9) - F_X(1.5) = 1 - 0.125 = 0.875$$

(δ) Η τομή των γεγονότων Α και Β είναι το γεγονός $A \cap B = 3 < X \leq 9$ και

$$P(A \cap B) = P(3 < X \leq 9) = P(X > 3) = 0.5 = P(A) \neq P(A) \cdot P(B)$$

Οπότε τα γεγονότα Α, Β *δεν* είναι ανεξάρτητα.

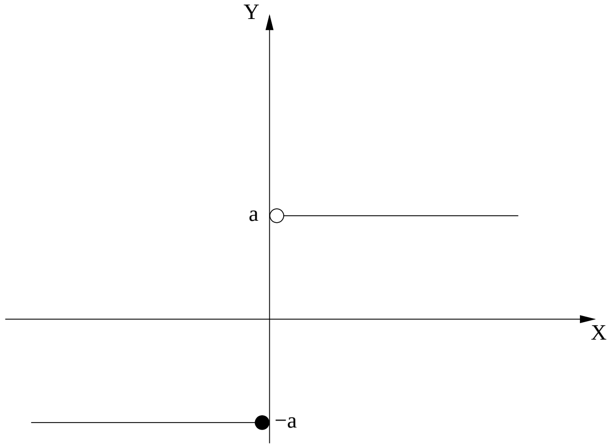
Θέμα 3

(α)

$$\begin{aligned} P(|X| < 8) &= P(-8 < X < 8) \\ &= \Phi\left(\frac{8-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-8-2}{10}\right) \\ &= \Phi(0.6) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(0.6) - (1 - \Phi(1)) \\ &= \Phi(0.6) + \Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[(X-4)^2\right] &= \mathbf{E}[X^2 - 8X + 16] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\ &= var(X) + \mathbf{E}^2[X] - 8\mathbf{E}[X] + 16 \\ &= 100 + 4 - 8 \cdot 2 + 16 = 104 \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση του μετασχηματισμού, ερώτημα (i), θέμα 4.

(γ) Εφόσον $Y = (X-2)^2$, η Y παίρνει μη αρνητικές τιμές, οπότε $f_Y(y) = 0$ για $y < 0$. Για $y \geq 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P((X-2)^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X - 2 \leq \sqrt{y}) \\ &= P(2 - \sqrt{y} \leq X \leq 2 + \sqrt{y}) \\ &= \Phi\left(\frac{2+\sqrt{y}-2}{10}\right) - \Phi\left(\frac{2-\sqrt{y}-2}{10}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{y}}{10}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) - 1 \end{aligned}$$

οπότε:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = 2\frac{d}{dy}\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right)$$

Αλλά η $\Phi(u)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της τυπικής γκαουσιάνης και συνεπώς

$$\frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$$

. Έτσι:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y}/10)^2} \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{\sqrt{y}}{10}\right) \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y/200} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}10} \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2\pi y}}e^{-y/200}, y \geq 0 \end{aligned}$$

Θέμα 4

(i) Προφανώς, η τυχαία μεταβλητή Y είναι διακριτή και παίρνει τιμές $\pm a$.

(ii) $P_Y(a) = P(Y = a) = P(X > 0) = 1/2$ και $P_Y(-a) = P(Y = -a) = P(X \leq 0) = 1/2$, αφού η X είναι γκαουσιανή με μηδενική μέση τιμή. Άρα:

$$P_Y = \begin{cases} 1/2, & y = a \\ 1/2, & y = -a \end{cases}$$

(iii)

- Για $X = 1.29$ έχουμε $X - Y = 1.29 - 1 = 0.29$, άρα $Z = (X-Y)^2 = 0.29^2 = 0.0841$.
- Για $X = \frac{\pi}{4}$ έχουμε $X - Y = \frac{\pi}{4} - 1 \simeq -0.2146$, άρα $Z = (X-Y)^2 = (-0.2146)^2 = 0.0461$.
- Για $X = -\frac{\pi}{4}$ έχουμε $X - Y = -\frac{\pi}{4} - (-1) \simeq 0.2146$, άρα $Z = (X-Y)^= 0.2146^2 = 0.0461$.

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνικό σφάλμα για το $+X$ είναι το ίδιο με αυτό για το $-X$.

(iv)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Z] &= \mathbf{E}\left[(X - Y^2)\right] \\
&= \mathbf{E}[(X-Y)^2 | X > 0] \cdot P(X > 0) + \mathbf{E}[(X-Y)^2 | x \leq 0] \cdot P(X \leq 0) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}[(X-a)^2 | X > 0] + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{E}[(X+a)^2 | X \leq 0] \\
&= \int_0^{+\infty} (x-a)^2) f_X(x) dx + \int_{-\infty}^0 (x+a)^2) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 f_X(x) dx - 2a \int_0^{+\infty} x f_X(x) dx + 2a \int_{-\infty}^0 x f_X(x) dx \\
&= var(X) + \mu_X^2 + a^2 - 4a \int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\
&= 1 + 0 + a^2 - 4a \frac{1}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

Για την ελαχιστοποίηση του $\mathbf{E}[Z]$ έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{E}[Z]}{da} = 0 \Rightarrow 2a - \frac{4}{\sqrt{2\pi}} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

(Η δεύτερη παράγωγος ως προς α είναι $2 > 0$, οπότε a είναι όντως ελάχιστο.)