Χειμερινό Εξάμηνο 2007 22 Ιανουαρίου 2008

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Διακριτές τ.μ. - Ολική Πιθανότητα και Κανόνας του Bayes: Operating system crashes.

Ένα πλήθος από 2×10^8 υπολογιστές τρέχουν το ίδιο λειτουργικό σύστημα. Για κάθε έναν από τους υπολογιστές (οι οποίοι λειτουργούν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο), η συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) της τ.μ. X, η οποία περιγράφει πόσες φορές το λειτουργικό "κρεμάει" σε μία μέρα, δίδεται από τη σχέση:

$$p_X(k) = \frac{4-k}{10}; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Σε μία τυχαία μέρα, δεδομένου ότι το λειτουργικό πέφτει $X = k$ φορές, ο χρήστης πρέπει να το επανεγκαταστήσει με πιθανότητα $1 - 2^{-k}$.

(α) Βρείτε την μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X.

(β) Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. Y, που περιγράφει πόσες φορές συνολικά το λειτουργικό "κρεμάει" για όλους τους υπολογιστές σε μία μέρα.

(γ) Κάνοντας χρήση του θεωρήματος ολικής πιθανότητας, βρείτε την πιθανότητα ότι το λειτουργικό σύστημα πρέπει να επανεγκατασταθεί σε κάποιο υπολογιστή μία δεδομένη μέρα.

(δ) Κάνοντας χρήση του κανόνα του Bayes, βρείτε τη δεσμευμένη πιθανότητα ότι το λειτουργικό έχει πέσει $X = k$ φορές σε κάποιον υπολογιστή δεδομένου ότι το λειτουργικό επανεγκαταστήθηκε στον υπολογιστή την συγκεκριμένη μέρα.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Βασικές Έννοιες Συνεχών τ.μ.

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των ΗΥ (σε χιλιάδες κομμάτια) που πουλάει η Dell στη διάρκεια μιας μέρας είναι μία τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} cx & \text{αν } 0 \leq x < 3 \\ c(6-x) & \text{αν } 3 \leq x < 6 \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), $F_X(x)$, της X.
(γ) Ποια η πιθανότητα ότι ο αριθμός των ΗΥ που πωλούνται σε μία μέρα (i) ξεπερνά τις 3000, (ii) είναι μεταξύ 1500 και 9000;
(δ) Αν Α και Β είναι τα γεγονότα (i) και (ii), αντίστοιχα, είναι τα Α και Β ανεξάρτητα;

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

Η τ.μ. X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 2$ και διασπορά $\sigma^2 = 100$: $X \sim N(2, 100)$.

(α) $P(|X| < 8) =;$
(Εκφράστε την απάντησή σας βάσει τιμών της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής, $\Phi(u)$.)
(β) $E[(X-4)^2] =;$
(γ) Έστω η τ.μ. $Y = (X-2)^2$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, $f_Y(y)$, της Y.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

Το αναλογικό σήμα X μοντελοποιείται ως μία τυπική Γκαουσιανή τ.μ., $X \sim N(0,\ 1)$. Σε ορισμένες εφαρμογές, μόνο κβαντισμένες τιμές του σήματος απαιτούνται, δηλαδή ένας κβαντιστής (quantizer) μετατρέπει το σήμα συνεχούς πλάτους σε σήμα διακριτού πλάτους. Στην δικιά μας εφαρμογή, το σήμα X μετατρέπεται σε μία από δύο επιτρεπόμενες στάθμες. Έστω Y η τ.μ. που δηλώνει την κβαντισμένη τιμή του σήματος, με $Y = a$ όταν $X > 0$ και $Y = -a$ όταν $X \leq 0$, όπου η θετική σταθερά a καθορίζει τις δύο επιτρεπόμενες στάθμες.

(i) Δώστε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού. Είναι η Y συνεχής ή διακριτή τ.μ.;
(ii) Ποια είναι η συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας της τ.μ. Y;
(iii) Έστω ότι $a = 1$. Αν το σήμα X συμβεί να πάρει την τιμή 1.29, ποιο είναι το σφάλμα της αναπαράστασης της X από την Y; Ποιο το τετράγωνο του σφάλματος, $Z = (X-Y)^2$; Ποιες είναι οι τιμές των σφαλμάτων και των τετραγώνων τους όταν $X = \pi/4$ και $X = -\pi/4$;
(iv) Είστε ο μηχανικός που θα σχεδιάσει τον κβαντιστή που ελαχιστοποιεί τη μέση τιμή του τετραγώνου του σφάλματος (το λεγόμενο μέσο τετραγωνικό σφάλμα, mean-square error, MSE), $E[Z]$. Η μόνη παράμετρος σχεδίασης είναι η επιλογή της τιμής του a. Βρείτε την έκφραση του $E[Z]$ ως συνάρτηση του a και μετά βρείτε την τιμή του a που ελαχιστοποιεί το $E[Z]$.

Βοήθεια: Για να βρείτε το $E[Z]$, χρησιμοποιείστε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας, υπολογίζοντας το $E[Z]$ όταν $X > 0$ και $X \leq 0$. Επίσης, χρησιμοποιείστε τη σχέση $\int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx = 1$.