ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πέμπτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/12/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 10/01/2008

Άσκηση 1.

(α) Εφόσον

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 10\alpha$$

η μοναδική τιμή για το α είναι $\alpha = 0.1$.

(β) Εφόσον η $f_X(\cdot)$ είναι άρτια συνάρτηση, τότε έχουμε ότι $\mathbf{E}[X] = 0$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} var(X) &= \mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx \\ &= 2\int_0^{10} \frac{10-x}{100} x^2 dx = \frac{50}{3}. \end{aligned}$$

(γ) Ομοίως, η αθροιστική συνάρτηση κατονομής της X είναι:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \\ &= \begin{cases} 0, & x < -10, \\ 0.005(x+10)^2, & x \in [-10, 0] \\ 1 - 0.005(x-10)^2, & x \in [0, 10], \\ 1, & x > 10 \end{cases} \end{aligned}$$

(δ) Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(\cdot)$ της Y είναι το άθροισμα των συναρτήσεων

$$g_1(x) = \begin{cases} f_X(5-x), & x \in [0, 15], \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και

$$g_2(x) = \begin{cases} f_X(x+5), & x \in [0, 5], \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

οπότε:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0.1, & x \in [0, 5], \\ 0.1 - 0.01(x-5), & x \in [5, 15] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άσκηση 2. Πρωτού ξεκινήσουμε ας θυμηθούμε μερικές χρήσιμες εξισώσεις για τις εκθετικές τυχαίες μεταβλητές. Έστω Z μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \\ F_Z(z) &= P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)dt = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda z}, & z \geq 0 \end{cases} \\ \mathbf{E}[Z] &= \frac{1}{\lambda},\ \mathbf{E}[Z^2] = \frac{2}{\lambda^2},\ var(Z) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

(α) Έστω A το γεγονός ότι η λάμπα που επιλέχθηκε είναι της εταιρίας A (οπότε η X είναι μια εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 1$ δεδομένου του γεγονοτος A). Τότε το A^c είναι το γεγονός ότι η λάμπα που επιλέχθηκε είναι της εταιρίας B (οπότε η X είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\lambda = 3$ δεδομένου του γεγονότος A^c). Πρώτα υπολογίζουμε τις $P(D|A)$ και $P(D|A^c)$:

$$\begin{aligned} P(D|A) &= P(X > t|A) \\ &= 1 - F_{X|A}(t) \\ &= e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D|A^c) &= P(X > t|A^C) \\ &= 1 - F_{X|A^c}(t) \\ &= e^{-3t} \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την $P(D)$, χρησιμοποιούμε το θεώρημα της ολικής πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A) \cdot P(A) + P(D|A^c) \cdot P(A^c) \\ &= e^{-t} \cdot \frac{1}{2} + e^{-3t} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \end{aligned}$$

(β) Έστω C_{1A} το γεγονός ότι η πρώτη λάμπα που χρησιμοποιούμε προέρχεται από την εταιρία A. Παρατηρούμε ότι το γεγονός C_{1A} είναι ισοδύναμο με το γεγονός A του υποερωτήματος (α). Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε ότι:

$$P(C_{1A}|D) = P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{e^{-t} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{e^{-t}+e^{-3t}}{2}} = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + e^{-3t}}$$

(γ) Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[X|A] \cdot P(A) + \mathbf{E}[X|A^c] \cdot P(A^c) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

Και για την διασπορά του έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2|A] &= \frac{2}{1^2},\ \mathbf{E}[X^2|A^c] = \frac{2}{3^2} \\ \mathbf{E}[X^2] &= \mathbf{E}[X^2|A] \cdot P(A) + \mathbf{E}[X^2|A^2] \cdot P(A^c) = \frac{10}{9} \\ var(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Άσκηση 3.

(α)

$$\begin{aligned} P(\text{ο Χρήστος κερδίζει}) &= 1 - P(\text{ο Χρήστος χάνει}) \\ &= 1 - P(X > Y) \\ &= 1 - \int_2^3 \int_2^x \frac{1}{4} dy dx \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

(β) Το πλήθος των αγώνων που συνολικά κερδίζει ο Χρήστος στο σύνολο των 10 αγώνες είναι μια απλή διωνμική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο 10 και με την πιθανότητα αυτή που υπολογίσαμε στο υποερώτημα (α). Έχουμε λοιπόν:

$$P[\text{ο Χρήστος κερδίζει 7 στους 10 αγώνες}] = \binom{10}{7}\left(\frac{7}{8}\right)^7\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

(γ) Ο νικητής του αγώνα έκανε τον μικρότερο χρόνο. Οπότε η κατανομή του χρόνου που πραγματοποίησε ο νικητής του αγώνα είναι $W = \min(X, Y)$. Για να λύσουμε το ζητούμενο, πρώτα θα υπολογίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και μετά θα την παραγοντοποιήσουμε για να παράγουμε την συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας.

$$\begin{aligned} F_W(w) &= P(\min(X,Y) \le w) \\ &= 1 - P(\min(X,Y) > w) \\ &= 1 - P(X > w, Y > w) \\ &= \begin{cases} 0, & w \le 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(3-w), & 1 < w \le 2 \\ 1 - \frac{1}{4}(12 - 7w + w^2), & 2 < w \le 3 \\ 1, & w > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Παραγοντοποιώντας αθροιστική συνάρτηση κατανομής παράγουμε την συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας της W:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < w \le 2 \\ \frac{7}{4} - \frac{w}{2}, & 2 < w \le 3 \\ 0, & \text{αλλίως} \end{cases}$$

Άσκηση 4.

(α) Δεδομένου του $X = x$, $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} f_G\left(\frac{y}{x}\right)$ είναι ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0.5x, 1.5x]$. Πιο διαισθητικά, δεδομένου του $X = x$, έχουμε ότι $Y = Gx$, όπου x μπορεί να το δούμε και ως σταθερά.

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \frac{x}{2} \le y \le \frac{3x}{2}, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β)

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \frac{1}{x}, \frac{x}{2} \le y \le \frac{3x}{2}, 0 < x < 1.$$

(γ)

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \int_{2/3y}^{2y} \frac{1}{x}dx = \ln(2y) - \ln(\frac{2y}{3}) = \ln(3), & 0 < y < \frac{1}{2} \\ \int_{2/3y}^{1} \frac{1}{x}dx = -\ln(\frac{2y}{3}), & \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2} \end{cases}$$

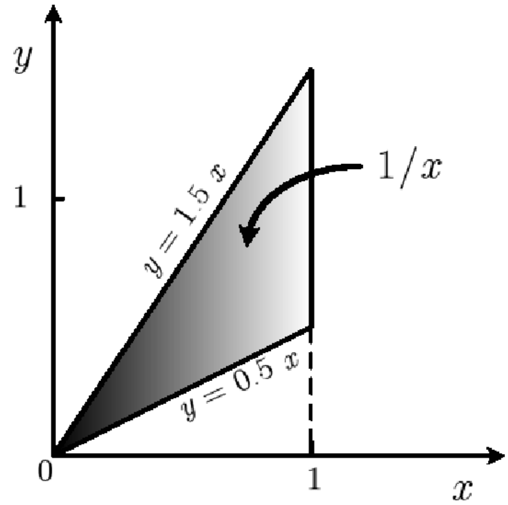
(δ)

$$f_{X|Y}(x|y = 1/2) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,1/2)}{f_Y(1/2)} = \frac{1/x}{\ln(3)}, & 1/3 \le x < 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

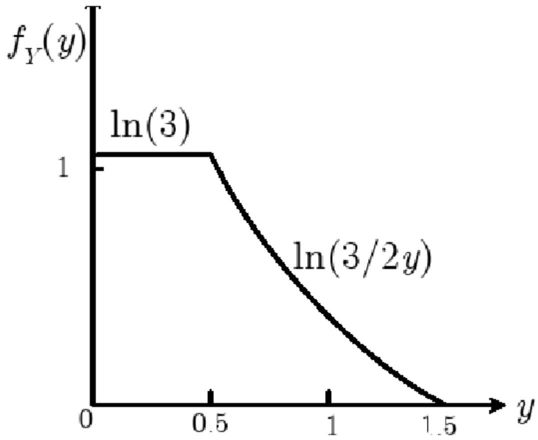
Άσκηση 5. Για να εκφράσουμε τον $\rho_{X,2Y}$ σε σχέση με τον $\rho_{X,Y}$ προχωράμε ακολούθως:

$$\begin{aligned} COV(X,2Y) &= E((X - EX)(2Y - E2Y)) \\ &= 2E((X-EX)(Y-EY)) = 2COV(X,Y) \\ \sigma_{2Y} &= \sqrt{E(2Y - E2Y)^2} = \sqrt{4E(Y-EY)^2} = 2\sigma_Y \\ \rho_{X,2Y} &= \frac{COV(X,2Y)}{\sigma_X \sigma_{2Y}} = \frac{2COV(X,Y)}{\sigma_X 2\sigma_Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho_{X,Y} \end{aligned}$$

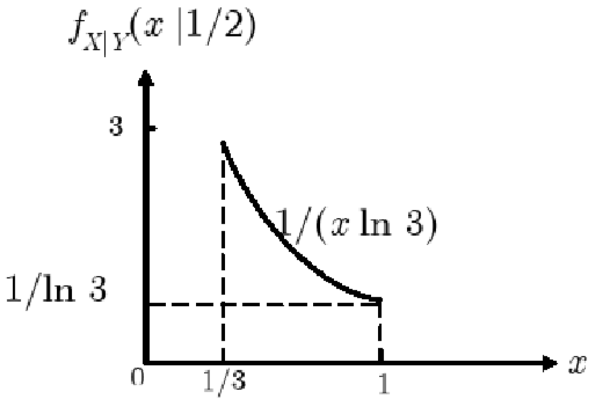
Εν γένει, ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των $aX + b$ και $cY + d$ είναι $p_{X,Y}$, αν $a > 0, b > 0$ και $c > 0, d > 0$.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση για το υποερώτημα (β) της άσκησης 4.



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση για το υποερώτημα (γ) της άσκησης 4.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση για το υποερώτημα (δ) της άσκησης 4.