ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πέμπτη Σειρά Ασκήσεων:
Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/12/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 10/01/2008

Άσκηση 1. Μία συνεχής τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-0.1|x|), & x \in [-10, 10], \\ 0 & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου a είναι μία σταθερά.

(α) Υπολογίστε την τιμή της a.
(β) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X.
(γ) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X.
(δ) Υπολογίστε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $Y = |X - 5|$.

Άσκηση 2. Ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουμε να χρησιμοποιούμε λάμπες, μία κάθε φορά, για να φωτίσουμε ένα δωμάτιο. Κάθε νέα λάμπα επιλέγεται ανεξάρτητα και ισοπίθανα από δύο εταιρίες Α και Β. Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) κάθε λάμπας ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda_A = 1$, αν η λάμπα προέρχεται από την εταιρία Α και με παράμετρο $\lambda_B = 3$, αν η λάμπα προέρχεται από την εταιρία Β.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας, υπολογίστε την πιθανότητα $P(D)$, ότι δεν θα πραγματοποιηθεί καμία αλλαγή λάμπας στις πρώτες t ώρες αυτού του πειράματος.
(β) Δεδομένου ότι δεν έχουμε χαλασμένη λάμπα κατά τη διάρκεια των πρώτων t ωρών, υπολογίστε την πιθανότητα ότι η πρώτη λάμπα που χρησιμοποιούμε προέρχεται από την εταιρία Α (χρησιμοποιείστε τον κανόνα του Bayes).
(γ) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής μέσης τιμής, υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X, του χρόνου μέχρι την πρώτη αλλαγή λάμπας.

Άσκηση 3. Ο Χρήστος και ο Ανδρέας συναγωνίζονται σε αγώνες δρόμου. Οι χρόνοι τους είναι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y, αντίστοιχα, που ακολουθούν ομοιόμορφες κατανομές. Οι χρόνοι του Χρήστου (οι τιμές της τ.μ. X) μεταβάλονται στο διάστημα $[1, 3]$ ενώ οι χρόνοι του Ανδρέα (οι τιμές της τ.μ. Y) μεταβάλονται στο διάστημα $[2, 4]$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A)$, να κερδίσει τον αγώνα ο Χρήστος.
(β) Υπολογίστε την πιθανότητα με την οποία ο Χρήστος κερδίζει ακριβώς 7 στους 10 αγώνες. Υποθέστε ότι το αποτέλεσμα κάθε αγώνα είναι ανεξάρτητο από αυτά των υπολοίπων.
(γ) Ορίστε τη τ.μ. W, ως τον χρόνο που πραγματοποίησε ο νικητής ενός αγώνα. Εκφράστε την W ως συνάρτηση των X και Y, και υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής.

Άσκηση 4. Σε ένα γραμμικό όργανο μέτρησης, η σχέση εισόδου-εξόδου είναι $Y = GX$, όπου τα μεγέθη X, Y, και G συμβολίζουν την είσοδο, την έξοδο, και το κέρδος του οργάνου, αντίστοιχα. Το κέρδος G είναι τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0.5,\ 1.5]$ ενώ η είσοδος X είναι τ.μ. επίσης ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0,\ 1]$ και είναι ανεξάρτητη της G.

(α) Υπολογίστε τη δεσμευμένη σ.π.π. $f_{Y/X}(y/x)$. Προσέξτε ότι για κάθε δυνατή τιμή $X = x$ της εισόδου X, πρέπει να καθορίσετε τις δυνατές τιμές της εξόδου Y καθώς και την έκφραση της $f_{Y/X}(y/x)$.
(β) Υπολογίστε την από κοινού σ.π.π. $f_{X,Y}(x, y)$. Δώστε την γραφική παράσταση όπου η $f_{X,Y}(x, y)$ παίρνει μη μηδενικές τιμές (δηλαδή το πεδίο τιμών των (x, y) στο επίπεδο).
(γ) Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της εξόδου Y, $f_Y(y)$.
(δ) Το όργανο σας δίνει τη μέτρηση $Y = 1/2$. Υπολογίστε και δώστε τη γραφική παράσταση της δεσμευμένης σ.π.π. της εισόδου X, $f_{X/Y}(x/y = \frac{1}{2})$.

Άσκηση 5. Έστω δύο τ.μ. X και Y με συντελεστή ετεροσυσχέτισης $\rho_{X,Y}$. Ποιος είναι ο συντελεστής ετεροσυσχέτισης των τ.μ. X και $2Y$;