ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τέταρτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/11/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 29/11/2007

Άσκηση 1.
Κοιτάζοντας το σύστημα μετάδοσης, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα να γίνει κάποιο λάθος κατά την μετάδοση ενός bit είναι $p = 0.2$, ανεξάρτητα αν αυτό το bit είναι 1 ή 0. Με αυτή την παρατήρηση, μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή R ως διωνυμική με $n = 40$ και $p = 0.2$.

(α) Άρα η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής R είναι:

$$p_E(e_o) = \binom{40}{e_o} \cdot 0.2^{e_o} \cdot 0.8^{40-e_o}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(\text{τουλάχιστον 38 bits μεταδόθηκαν σωστά}) &= P(E_o < 3) \\ &= P(E_o = 2) + P(E_o = 1) + P(E_o = 0) \\ &= \binom{40}{2} 0.2^2 0.8^{38} + \binom{40}{1} 0.2^1 0.8^{39} + \binom{40}{0} 0.8^{40} \\ &= 0.00794 \end{aligned}$$

(γ) Σε ένα λεπτό μεταδίδονται $6 \cdot 10^7$ bits και
$P(\text{τουλάχιστον ένα bit μεταδίδεται λάθος}) = P(E_o > 0)$

$$\begin{aligned} P(E_o > 0) &= 1 - P(E_O = 0) \\ &= 1 - \binom{n}{0} (1-p)^{n-0} \\ &= 1 - \binom{6 \cdot 10^7}{0} (1 - 5 \cdot 10^8)^{6 \cdot 10^7} \\ &= 1 - 0.0498 \\ &= 0.95022 \end{aligned}$$

Άσκηση 2.
Γνωρίζουμε ότι για μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ ισχύει ότι:

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i \cdot e^{-\lambda}}{i!}.$$

Οπότε :

$$\frac{P(X = i)}{P(X = i - 1)} = \frac{\lambda^i \cdot e^{-\lambda}}{i!} \cdot \frac{(i-1)!}{\lambda^{i-1} \cdot e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{i}$$

οπότε για $0 < i < \lambda$ το κλάσμα είναι μεγαλύτερο του 1, άρα η $P(X = i)$ είναι γνησίως αύξουσα, αλλιώς το κλάσμα είναι μικρότερο του 1 και άρα η $P(X = i)$ γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 3.

(α) Το πλήθος του αριθμού σοκολατών που χρειάζεται να καταναλώσεις είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητή. Έτσι, αν ονομάζουμε την μεταβλητή μας C τότε $P(C = k) = (1-p)^{k-1}p$. Για να βρούμε το μέσο αριθμό σοκολατών που πρέπει κάποιος να φάει για να βρεί ένα κουπόνι έχουμε ότι:

$$\mathbf{E}[C] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}.$$

Για να καταλάβουμε γιατί η παραπάνω ισότητα είναι αληθείς, ας σκεφτούμε το εξής:

$$\begin{aligned} (1-p) < 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = \frac{1-p}{p} \\ (\text{παραγοποιώντας ως προς } p) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} = \frac{1}{p^2} \\ &\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

όπως ισχυρίστηκε παραπάνω.

(β) Την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής την βρίσκουμε με παρόμοιο τρόπο:

$$Var[C] = \mathbf{E}[C^2] - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Η παραπάνω ισότητα μπορεί να παραχθεί εύκολα, όπως και αυτή του (α) υποερωτήματος, ξεκινώντας με ένα απείρο γεωμετρικό άθροισμα που συγκλίνει και παραγοποιώντας το κατάλληλα (Δυο παραγοποιήσεις χρειάζονται για αυτό το υποερώτημα). Στην παραπάνω περίπτωση ανταλλάξαμε το άπειρο άθροισμα και την παραγοντοποίηση. Αυτό συνήθως είναι πολύ δύσκολο να ισχύει, αλλά σε αυτή την περίπτωση, κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις ότι το άθροισμα είναι γεωμετρικό και συγκλίνει, είναι αληθές. (Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί ακόμα να αποδειχθεί και με το θεώρημα Taylor.)

Άσκηση 4.

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας είναι:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{9} & x = 2, \\ \frac{2}{9} & x = 3, \\ \frac{3}{9} & x = 4, \\ \frac{2}{9} & x = 5, \\ \frac{1}{9} & x = 6, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η μέση τιμή της είναι:

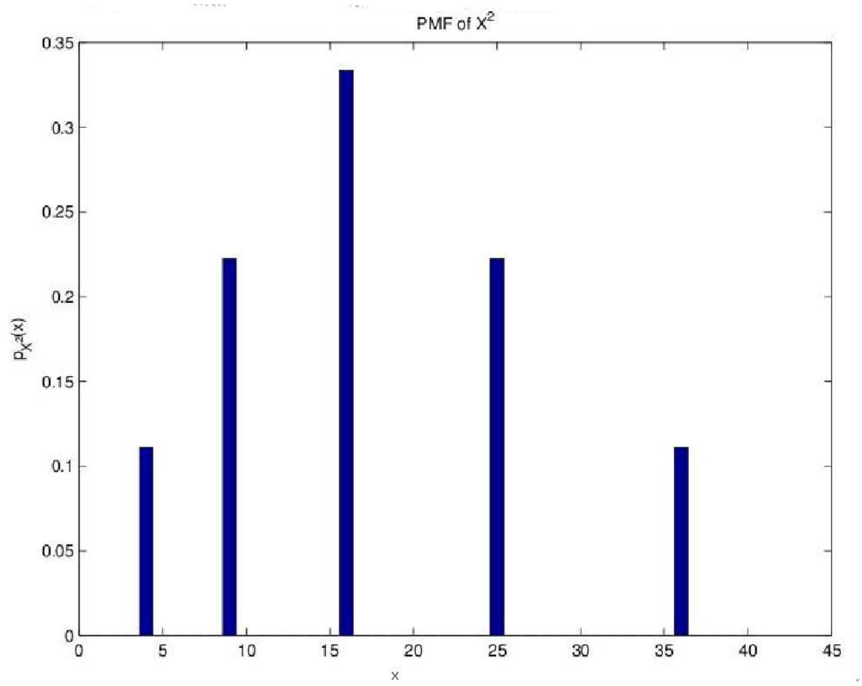
$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{x=1}^{6} x \cdot p_X(x) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{3}{9} + 5 \cdot \frac{2}{9} + 6 \cdot \frac{1}{9} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Η διασπορά της είναι:

$$\begin{aligned} var[X] &= \sum_{x=1}^{6} (x - \mathbf{E}[X])^2 \cdot p_X(x) \\ &= \frac{1}{9}(2-4)^2 + \frac{2}{9}(3-4)^2 + \frac{3}{9}(4-4)^2 + \frac{2}{9}(5-4)^2 + \frac{1}{9}(6-4)^2 \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(β) $Z = X^2$

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{9} & z = 4, \\ \frac{2}{9} & z = 9, \\ \frac{3}{9} & z = 16, \\ \frac{2}{9} & z = 25, \\ \frac{1}{9} & z = 36, \\ 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$



Σχήμα 1: Η συνάρτηση πιθανότητας της άσκησης 4.

Άσκηση 5.

(α) Προσθέτουμε όλες τις τιμές του πίνακα και θέτουμε το άθροισμα ίσο με 1.

$$20c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{20}.$$

(β) $P(Y < X) = c + 6c + 4c = 11c = 11/20$.

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$\mathbf{4c}$
$y = 1$	$3c$	$\mathbf{c}$	$\mathbf{6c}$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(γ) $P(Y > X) = 2c + c + c = 4c = 1/5$.

$y = 3$	$\mathbf{c}$	$\mathbf{c}$	$2c$
$y = 2$	$\mathbf{2c}$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(δ) $P(Y = X) = 1 - P(Y < X) - P(Y > X) = 1 - \frac{11}{20} - \frac{1}{5} = 1/4$

(ε) $P(Y = 3) = c + c + 2c = 4c = 1/5$.

$y=3$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{2c}$
$y=2$	$2c$	0	$4c$
$y=1$	$3c$	c	$6c$
	$x=1$	$x=2$	$x=3$

(στ)

$$p_X(x) = \begin{cases} 3/10, & x=1 \\ 1/10, & x=2 \\ 3/5, & x=3 \end{cases} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & y=1 \\ 3/10, & y=2 \\ 1/5, & y=3 \end{cases}$$

(ζ)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{1}{10}\cdot 2 + \frac{3}{5}\cdot 3 = 2.3 \\ \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{10}\cdot 2 + \frac{1}{5}\cdot 3 = 1.7 \end{aligned}$$

(η)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \frac{3}{10}\cdot 1 + \frac{1}{10}\cdot 4 + \frac{3}{5}\cdot 9 = 6.1 \\ \mathbf{E}[Y^2] &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{10}\cdot 4 + \frac{1}{5}\cdot 9 = 3.5 \\ var(X) &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 = 6.1 - 2.3^2 = 0.81 \\ var(Y) &= \mathbf{E}[Y^2] - (\mathbf{E}[Y])^2 = 3.5 - 1.7^2 = 0.61 \end{aligned}$$

Άσκηση 6. Έστω τα εξής γεγονότα: T: Ο Θωμάς κερδίζει τον αγώνα, T^c: Η Μαρία κερδίζει τον αγώνα, M: Η Μαρία κερδίζει τον διαγωνισμό, M^c: Ο Θωμάς κερδίζει τον διαγωνισμό, A: Η Μαρία κερδίζει τον δεύτερο αγώνα. Το δενδρικό διάγραμμα που περιγράφει τον διαγωνισμό μεταξυ των δύο παικτών φαίνεται στο σχήμα 2 και οι πιθανότητες των ακολουθιών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ακολουθία	**Αποτέλεσμα**	**Πιθανότητα**
TT	M^c	1/4
TT^cT	M^c	1/12
TT^cT^c	M	1/6
T^cTT	M^c	1/18

(α)

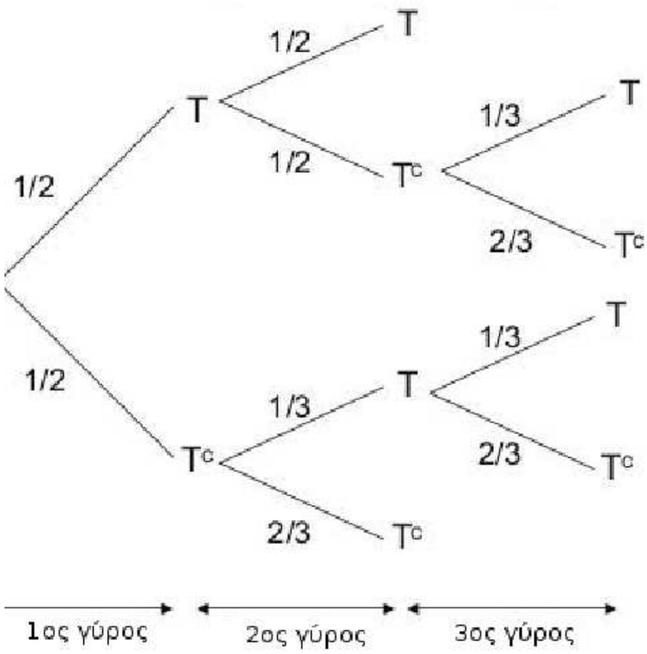
$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} = \frac{11}{18} \\ P(M|A) &= \frac{P(M\cap A)}{P(A)} = \frac{1/6 + 1/3}{1/12 + 1/6 + 1/3} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

(β)

$$P(N=2|A) = \frac{P(N=2\cap A)}{P(A)} = \frac{1/3}{1/12+1/6+1/3} = \frac{4}{7}$$

$$p_{N|A}(n) = \begin{cases} 4/7, & n=2 \\ 3/7, & n=3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[N|A] &= \frac{4}{7}\cdot 2 + \frac{3}{7}\cdot 3 = \frac{17}{7} \approx 2.43 \\ \mathbf{E}[N^2|A] &= \frac{4}{7}\cdot 4 + \frac{3}{7}\cdot 9 = \frac{43}{7} \\ var(N|A) &= \mathbf{E}[N^2|A] - (\mathbf{E}[N|A])^2 = \frac{43}{7} - \left(\frac{17}{7}\right)^2 = \frac{12}{49} \\ \sigma(N|A) &= \sqrt{var(N|A)} = \sqrt{\frac{12}{49}} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \approx 0.49 \end{aligned}$$



Σχήμα 2: Το δενδρικό διάγραμμα της άσκησης 6.

(γ) Έστω S το πλήθος των νικών της Μαρίας σε μια ακολουθία n διαγωνισμών. Η S είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους $p = 11/18$ και $n = 180$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[S] &= np = 180 \cdot \frac{11}{18} = 110 \\
var(S) &= np(1-p) = 180 \cdot \frac{11}{18} \cdot \frac{7}{18} = \frac{385}{9} \\
R = 10S - 5(180 - S) = 15S - 900 & \\
\mathbf{E}[R] &= \mathbf{E}[15S - 900] = 15\mathbf{E}[S] - 900 = 15 \cdot 110 - 900 = 750 \\
var(R) &= 15^2 var(S) = 225 \cdot \frac{385}{9} = 9625 \\
\sigma(R) &= \sqrt{var(R)} = \sqrt{9625} \approx 98.11
\end{aligned}$$

Άσκηση 7.

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας είναι μια διωνυμική με $p = 1/4$ και $n = 32$, άρα

$$p_K(k) = \begin{cases} \binom{32}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{32-k}, & \text{για } k = 0, 1, \ldots, 32 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β)

$$\mathbf{E}[K] = np = 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ αυτοκίνητα}$$

$$var(K) = np(1-p) = 32 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 6 \text{ αυτοκίνητα}^2$$

(γ) Πρώτα υπολογίζουμε ότι $\mathbf{E}[M] = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$ αυτοκίνητα. Άρα:

$$\mathbf{E}[Q_1] = \mathbf{E}[K \cdot c_1] = c_1 \cdot \mathbf{E}[K] = \$640$$

$$\mathbf{E}[Q_2] = \mathbf{E}[M \cdot c_2] = c_2 \cdot \mathbf{E}[M] = \$800$$

Άρα, η δεύτερη στρατηγική επιφέρει μεγαλύτερο κέρδος στον Κώστα.

(δ)

$$\begin{aligned}
p_L(l) &= P(\text{Ο Κώστας πουλάει } L \text{ αυτοκίνητα}) \\
&= P(\text{Ο Κώστας πουλάει } L \text{ αυτοκίνητα}|\text{Κορώνα}) \cdot P(\text{Κορώνα}) \\
&\quad + P(\text{Ο Κώστας πουλάει } L \text{ αυτοκίνητα}|\text{Γράμματα}) \cdot P(\text{Γράμματα}) \\
&= p_K(l) \cdot \frac{1}{2} + p_M(l) \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Έχουμε ότι:

$$p_L(l) = \begin{cases} \frac{1}{2}\binom{32}{l}\left(\frac{1}{4}\right)^l\left(\frac{3}{4}\right)^{32-l} + \frac{1}{2}\binom{16}{l}\left(\frac{1}{2}\right)^l\left(\frac{1}{2}\right)^{16-l}, & \text{για } l = 0, 1, \ldots, 16 \\ \frac{1}{2}\binom{32}{l}\left(\frac{1}{4}\right)^l\left(\frac{3}{4}\right)^{32-l}, & \text{για } l = 17, 18, \ldots, 32 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Άρα:

$$\mathbf{E}[L] = \mathbf{E}[L|\text{Κορώνα}]\cdot P(\text{Κορώνα}) + \mathbf{E}[L|\text{Γράμματα}]\cdot P(\text{Γράμματα}) = \mathbf{E}[K]\cdot\frac{1}{2} + \mathbf{E}[M]\cdot\frac{1}{2} = 8 \text{ αυτοκίνητα.}$$

(ε)

$$\begin{aligned}
P(\text{Κορώνα}|L = 4) &= \frac{P(L = 4 \text{ και Κορώνα})}{P(L = 4)} \\
&= \frac{P(L = 4|\text{Κορώνα}) \cdot P(\text{Κορώνα})}{P(L = 4)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\binom{32}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^{28}}{\frac{1}{2}\binom{32}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^{28} + \frac{1}{2}\binom{16}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{12}}
\end{aligned}$$

Αν ο Κώστας πουλήσει 18 αυτοκίντα σε μια ημέρα, τότε έχουμε:

$$P(\text{Κορώνα}|L = 18) = 1.$$

(στ) Πρώτα, υπολογίζουμε την μέση τιμή του C και την αναμενόμενη τιμή για το C^2:

$$\mathbf{E}[C] = 90 \cdot \frac{1}{2} + 110 \cdot \frac{1}{2} = 100\$,$$

$$\mathbf{E}[C^2] = 8100 \cdot \frac{1}{2} + 12100 \cdot \frac{1}{2} = 10100\$^2$$

Εφόσον η K και C είναι ανεξάρτητες:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[Q] &= \mathbf{E}[K \cdot C] = \mathbf{E}[K] \cdot \mathbf{E}[C] = 800\$ \\
\mathbf{E}[Q^2] &= \mathbf{E}[K^2 \cdot C^2] = \mathbf{E}[K^2] \cdot \mathbf{E}[C^2] \\
&= (var(K) + (\mathbf{E}[K])^2) \cdot \mathbf{E}[C^2] \\
&= (6 + 64) \cdot 10100 \\
&= 707000\$^2. \\
var(Q) &= \mathbf{E}[Q^2] - (\mathbf{E}[Q])^2 \\
&= 707000 - 640000 \\
&= 67000\$^2
\end{aligned}$$

(ζ) Έστω Y είναι το πλήθος των πελατών που εξυπηρέτησε μέχρι και την πρώτη πώληση. Η Y είναι μια γεωμετρική τυχαία μεταβλητη με $p = 1/4$ και:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1}\left(\frac{1}{4}\right), & y = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{p} = 4, \ var(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 12.$$

Παρατηρούμε ότι $X = Y - 1$, οπότε έχουμε:

$$p_X(x) = P(X = x) = P(Y = x + 1) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{y-1}\left(\frac{1}{4}\right), & y = 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] - 1 = 3,\ var(X) = var(Y) = 12.$$