ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 15/11/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 29/11/2007

Άσκηση 1. Θεωρείστε το λεγόμενο συμμετρικό δυαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι που περιγράφεται από τις ακόλουθες πιθανότητες μετάβασης:

$$p_{00} = p_{11} = 1 - p = 0.8,$$

$$p_{01} = p_{10} = p = 0.2,$$

όπου p_{ij} $(i, j = 1, 2)$ είναι η δεσμευμένη πιθανότητα λήψης του συμβόλου i δεδομένου ότι έχει σταλεί το σύμβολο j. Η είσοδος στο κανάλι αποτελείται από μία ακολουθία συμβόλων 0 και 1, τα οποία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Έστω R η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το πλήθος των σφαλμάτων κατά τη μετάδοση 5 λέξεων που αποτελούνται από 8 σύμβολα η κάθε μία.

(α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της R;
(β) Ποια είναι η πιθανότητα σωστής μετάδοσης τουλάχιστον 38 συμβόλων;
(γ) Έστω $p = 5 \times 10^{-8}$ και υποθέστε ότι μεταδίδονται 10^6 σύμβολα το δευτερόλεπτο. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ενός σφάλματος μετάδοσης το λεπτό;

Άσκηση 2.Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο λ. Δείξτε ότι η $P(X = i)$ είναι γνησίως αύξουσα ως προς i για $i \leq \lambda$, ενώ για $i > \lambda$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άσκηση 3. Στα πλαίσια διαφημιστικής καμπάνιας, ένα εργοστάσιο κατασκευής σοκολάτας τοπο8ετεί ένα χρυσό κουπόνι σε μερικές συσκευασίες σοκολάτας. Όποιος βρει ένα τέτοιο κουπόνι σε μια σοκολάτα κερδίζει μια ξενάγηση στο εργοστάσιο και όσες σοκολάτες επιθυμεί. Η πιθανότητα να βρει κανείς ένα τέτοιο κουπόνι όταν ανοίξει μία σοκολάτα είναι p. Βρείτε:

(α) Το μέσο αριθμό σοκολάτων που πρέπει να φάει κανείς για να βρει ένα κουπόνι.
(β) Τη διασπορά του πλήθους σοκολάτων που πρέπει να φάει κανείς για να βρει ένα κουπόνι.

Άσκηση 4. Δύο δίκαια ζάρια με τρεις πλευρές ρίχνονται συγχρόνως. Έστω X το άθροισμα των αριθμών που έφεραν τα ζάρια.

(α) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας, την μέση τιμή και τη διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.

(β) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας της X^2 και σχεδιάστε την γραφική της παράσταση.

Άσκηση 5. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X, Y δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

$y = 3$	c	c	$2c$
$y = 2$	$2c$	0	$4c$
$y = 1$	$3c$	c	$6c$
	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$

(α) Βρείτε την τιμή της σταθεράς c.
(β) Βρείτε την $P(Y < X)$.
(γ) Βρείτε την $P(Y > X)$.
(δ) Βρείτε την $P(Y = X)$.
(ε) Βρείτε την $P(Y = 3)$.
(στ) Βρείτε τη περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
(ζ) Βρείτε τις μέσες τιμές $E[X]$, $E[Y]$.
(η) Βρείτε τις διασπορές $var(X)$, $var(Y)$.

Άσκηση 6. Σε ένα διαγωνισμό ανάμεσα στην Μαίρη και τον Θωμά, κερδίζει αυτός που κάνει συνολικά 2 νίκες. Η δεσμευμένη πιθανότητα η Μαίρη να κερδίσει σε έναν οποιδήποτε αγώνα είναι $(W + 1)/(W + 2)$, όπου W είναι το πλήθος των αγώνων που έχει κερδίσει μέχρι τώρα η Μαίρη στο συγκεκριμένο διαγωνισμό. Ορίζουμε τα εξής γεγονότα. M: η Μαίρη να κερδίζει τον διαγωνισμό, A: η Μαίρη κερδίζει τον δεύτερο αγώνα, T: Ο Θωμάς κερδίζει τον αγώνα.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P(M)$ και $P(M \mid A)$.

(β) Έστω N το πλήθος των αγώνων που απαιτούνται για οποιονδήποτε διαγωνισμό μεταξύ του Θωμά και της Μαίρης μέχρι να βρεθεί νικητής. Βρείτε την δεσμευμένη μέση τιμή, $E[N/A]$, και δεσμευμένη τυπική απόκλιση, $\sigma(N/A)$, για την τ.μ. N δεδομένου ότι η Μαίρη κέρδισε στον δεύτερο αγώνα.

(γ) Αυτή τη χρονιά η Μαίρη με το Θωμά θα κάνουν συνολικά 180 διαγωνισμούς. Η Μαίρη κερδίζει 10 δολλάρια κάθε φορά που κερδίζει σε ένα διαγωνισμό, αλλά δίνει 5 δολλάρια σε κάθε διαγωνισμό που χάνει. Βρείτε την μέση τιμή και τη τυπική απόκλιση του χρηματικού ποσού που κερδίζει η Μαίρη τη χρονιά αυτή.

Βοήθεια: Σχηματίστε το δενδρικό διάγραμμα που περιγράφει ένα διαγωνισμό μεταξύ των δύο παικτών χρησιμοποιώντας τα γεγονότα T και T^c. Υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης από κόμβο σε κόμβο του δένδρου.

Άσκηση 7. Ο Κώστας είναι πωλητής αυτοκινήτων. Στόχος του είναι να αυξήσει τα κέρδη του, αλλά συχνά χάνει πελάτες στην προσπάθειά του να επισπεύσει την απόφασή τους. Ο εργοδότης του αποφασίζει να τον βοηθήσει και του επιτρέπει να ασχολείται παραπάνω ώρα με τον κάθε πελάτη, μειώνοντας τον συνολικό αριθμό πελατών που μπορεί να εξυπηρετεί κάθε μέρα. Ο εργοδότης του προτείνει 2 στρατηγικές.

(A) Να αφιερώνει σε κάθε πελάτη 15 λεπτά ώστε να τον εξυπηρετήσει. Συνολικά κατά τη διάρκεια της μέρας μπορεί να εξυπηρετήσει 32 πελάτες. Η πιθανότητα να κάνει μια πώληση σε μια εξυπηρέτηση είναι 1/4, και όλοι οι πελάτες και οι εξυπηρετήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για κάθε πώληση εισπράττει προμήθεια $c_1 = \$80$.

(B) Να αφιερώνει σε κάθε πελάτη 30 λεπτά για να τον εξυπηρετήσει. Συνολικά κατά τη διάρκεια της μέρας μπορεί να εξυπηρετήσει 16 πελάτες. Η πιθανότητα να κάνει μια πώληση σε μια εξυπηρέτηση είναι 1/2, και όλοι οι πελάτες και οι εξυπηρετήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για κάθε πώληση εισπράττει προμήθεια $c_2 = \$100$.

Έστω K το πλήθος των αυτοκινήτων που πουλάει ο Κώστας μια συγκεκριμένη μέρα ακολουθώντας την στρατηγική (A). Τα κέρδη του τη μέρα αυτή είναι $Q_1 = K \cdot c_1$. Έστω M το πλήθος των αυτοκινήτων που πουλάει ο Κώστας μια συγκεκριμένη μέρα ακολουθώντας την στρατηγική (B). Τα κέρδη του τη μέρα αυτή είναι $Q_2 = M \cdot c_2$.

(α) Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας για την τ.μ. K.

(β) Υπολογίστε αριθμητικά την μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. K.

(γ) Βρείτε το μέσο κέρδος για κάθε στρατηγική. Ποια συμφέρει περισσότερο στον Κώστα·

(δ) Υποθέστε ότι ο Κώστας δεν μπορεί να αποφασίσει ποιά στατηγική να εφαρμόσει. Αποφασίζει λοιπόν να ρίξει ένα δίκαιο κέρμα και αν φέρει κορώνα επιλέγει την (A) αλλιώς την (B). Έστω L ο αριθμός των αυτοκινήτων που πουλάει εφαρμόζοντας την στρατηγική αυτή. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας και τη μέση τιμή για την L.

(ε) Υποθέστε ότι ο Κώστας εφαρμόζει την προηγούμενη στατηγική δ). Δεδομένου ότι πούλησε 4 αυτοκίνητα μια μέρα, ποιά είναι η πιθανότητα το κέρμα να έφερε κορώνα; Εάν πούλησε 18 αυτοκίνητα, ποια είναι η πιθανότητα το κέρμα να έφερε κορώνα;

(στ) (Το ερώτημα μπορεί να λυθεί ανεξάρτητα από τα δ) και ε)). Μία μέρα ο Κώστας αποφασίζει να ακολουθήσει τη στρατηγική (A). Την ίδια μέρα ο εργοδότης του Κώστα αποφασίζει να αυξήσει τη προμήθεια του Κώστα σε \$90 ή \$110. Για να πάρει μια απόφαση (για το πόσο 8α αυξήσει τη προμήθεια) ρίχνει και αυτός ένα δίκαιο κέρμα. Έστω C η τ.μ. για τη προμήθεια. Βρείτε αριθμητικά τη μέση τιμή και τη διασπορά για τα κέρδη του Κώστα $Q = K \cdot C$ τη μέρα αυτή.

(ζ) (Το ερώτημα μπορεί να λυθεί ανεξάρτητα από τα δ), ε) και στ)). Έστω ότι ο Κώστας αποφασίζει να επιλέξει την στρατηγική (A). Έστω X το πλήθος των αποτυχιών του Κώστα (σε μια εξυπηρέτηση δεν κατάφερε να πουλήσει ένα αυτοκίνητο) ΠΡΙΝ την πρώτη του πώληση. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας, την μέση τιμή και τη διασπορά της X. (Προσοχή: Σε μια γεωμετρική κατανομή η πιθανότητα η τ.μ. να πάρει την τιμή μηδέν είναι μηδενική, ενώ η τ.μ. X, όπως ορίστηκε παραπάνω, παίρνει την τιμή μηδέν όταν ο Κώστας κάνει πώληση στη πρώτη του εξυπηρέτηση).