ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινο εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/11/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2007

Άσκηση 1.

Ο τύπος για τους ανασυνδυασμούς n αντικειμένων εκ των οποίων υπάρχουν k_1 αντικείμενα τύπου 1, k_2 αντικείμενα τύπου 2, ... , k_m αντικείμενα τύπου m είναι:

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdots k_m!}.$$

Με βάση αυτόν τον τύπο η λύση του προβλήματος είναι απλή:

(α) με την λέξη children μπορούμε να κάνουμε 8! αναγραμματισμούς.

(β) με την λέξη bookkeeper μπορούμε να κάνουμε $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ αναγραμματισμούς

.

Άσκηση 2.

Την άνοιξη και το φθινόπωρο, κάθε μέρα έχει τρεις δυνατές καταστάσεις για τον καιρό, οπότε για κάθε μια από αυτές τις εποχές ο συνολικό πλήθος δυνατών συνδιασμών είναι 3^{90}. Ομοίως υπάρχουν 4^{90} δυνατοί συνδυασμοί για το χειμώνα και 2^{90} για το καλοκαίρι. Άρα ο συνολικός αριθμός όλων των δυνατών ακολουθιών ημερησίων δελτίων καιρού για ένα έτος είναι:

$$3^{90} \cdot 3^{90} \cdot 4^{90} \cdot 2^{90} \cdot \approx 10^{167}$$

Άσκηση 3.

Έστω A το γεγονός ότι το δείγμα περιέχει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό αντικείμενο.

(α) Όταν το δείγμα σχηματίζεται με επανατοποθέτηση των αντικειμένων, τότε η πιθανότητα το δείγμα να μην έχει κανένα ελαττωματικό αντικείμενο είναι:

$$P(A^c) = \binom{N-K}{N}^M.$$

Οπότε η ζητούμενη πιθανότητα, ότι το δείγμα περιέχει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό αντικείμενο είναι:

$$P(A) = 1 - \binom{N-K}{N}^M.$$

(β) Σε αυτή την περίπτωση, το δείγμα συλλέγετε χωρίς επανατοποθέτηση των αντικειμένων. Αν $M > N - K$ τότε κάθε δείγμα μεγέθους M περιέχει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό τρόπο, οπότε

$$P(A) = 1.$$

Αλλιώς, $M \leq N - K$, και υπάρχουν $\binom{N}{M}$ ισοδύναμοι τρόποι να επιλέξεις ένα δείγμα από M αντικείμενα από ένα κουτί N αντικειμένων. Επίσης υπάρχουν $\binom{N-K}{M}$ ισοδύναμοι τρόποι να επιλέξεις ένα δείγμα M αντικειμένων από ένα κουτί $N - K$ αντικειμένων που δεν είναι ελαττωματικά. Οπότε η πιθανότητα το δείγμα να μην έχει κανένα ελαττωματικό αντικείμενο είναι:

$$P(A^c) = \frac{\binom{N-K}{M}}{\binom{N}{M}}$$

και η ζητούμενη πιθανότητα:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{N-K}{M}}{\binom{N}{M}}.$$

Άσκηση 4.

(α) Το πλήθος των πιθανών χεριών που μπορεί να πάρει ο πρώτος παίχτης είναι $\binom{52}{13}$. Μονάχα ένα από αυτά τα χέρια αποτελείται από 13 σπαθία μόνο, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$\frac{1}{\binom{52}{13}}$$

(β) Τα τέσσερα γεγονότα, ο παίχτης 1 να πάρει 13 σπαθιά, ο παίχτης 2 να πάρει 13 σπαθιά, ο παίχτης 3 να πάρει 13 σπαθιά, και ο παίχτης 4 να πάρει 13 σπαθιά, είναι ξένα μεταξύ τους. Οπότε μπορούμε να προσθέσουμε τις επιμέρους πιθανότητες για να πάρουμε την ζητούμενη πιθανότητα. Κάθε επιμέρους γεγονός έχει πιθανότητα $\frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$\frac{4}{\binom{52}{13}}$$

(γ) Έστω A το γεγονός ότι ο παίχτης 1 έχει 13 σπαθιά και B το γεγονός ότι ο παίχτης 1 έχει τον Ρήγα κούπα. Αν γνωρίζουμε ότι το γεγονός B ισχύει, τότε ξέρουμε ότι δεν μπορεί να έχει και τα 13 σπαθιά. Με άλλα λόγια $P(A|B) = 0$. Όμως γνωρίζουμε ότι $P(A) = \frac{1}{\binom{52}{13}}$, οπότε τα A καιB δεν είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον τα γεγονότα A καιB είναι ξένα μεταξύ τους. και γενικά γνωρίζουμε ότι όταν δυο γεγονότα με μη μηδενική πιθανότητα είναι ξένα μεταξύ τους, τότε δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα.

(δ) Έστω A το γεγονός ότι τα φύλλα του πρώτου παίχτη έχουν όλα το ίδιο σχήμα και B το γεγονός ότι ο παίχτης 1 παίρνει τον Ρήγα κούπα. Θα δείξουμε ότι τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα δείχνωντας ότι $P(B|A) = P(B)$. Γνωρίζουμε ότι $P(B|A) = 1/4$, αφού δεδομένου ότι τα φύλλα του παίχτη 1 έχουν όλα το ίδιο σχήμα, γνωρίζουμε ότι το σχήμα μπορεί να είναι ένα από τα τέσσερα, είτε κούπες, είτε καρό, είτε σπαθιά, είτε μπαστούνια. Κάθε σχήμα είναι ισοπίθανο με κάθε άλλο με πιθανότητα 1/4. Παρατηρούμε επιπλέον ότι $P(B) = 1/4$, αφού κάθε ένας από τους 4 παίχτες μπορεί να πάρει τον Ρήγα κούπα με ίση πιθανότητα, άρα η πιθανότητα ο παίχτης 1 να πάρει τον Ρήγα κούπα είναι 1/4. Οπότε εφόσον $P(B|A) = P(B)$, τότε τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον παρατηρήστε ότι τα δυο αυτά γεγονότα δεν είναι ξένα μεταξύ τους, καθώς η τομή τους δεν είναι κενή - και αυτή είναι το γεγονός ο παίχτης 1 να πάρει όλες τις κούπες.

Άσκηση 5.

Έστω A το γεγονός ότι επιλέξαμε 20 καλά αυτοκίνητα από το σύνολο των 100, με K το πλήθος των ελαττωματικών αυτοκινήτων με $K \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(K = 0|A)$. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Bayes έχουμε:

$$P(K = 0|A) = \frac{P(A|K = 0)P(K = 0)}{\sum_{i=0}^{9} P(A|K = i)P(K = i)}.$$

$P(A|K = i)$ είναι η πιθανότητα ότι 20 καλά αυτοκίνητα να επιλέχθηκαν δεδομένου ότι υπάρχουν i ελαττωματικά είναι:

$$P(A|K = i) = \frac{\binom{i}{0}\binom{100-i}{20}}{\binom{100}{20}} = \frac{(100 - i)!80!}{(80 - i)!100!}$$

Εφόσον $P(K=i)=0.1$ για κάθε τιμή του i και $P(A|K=0)=1$ έχουμε ότι:

$$P(K=0|A)=\frac{1}{\sum_{i=0}^{9}P(A|K=i)}$$

Άσκηση 6.

(α) Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P_{2,1}$ αρκεί να κοιτάξουμε τα πιθανά αποτελέσματα:

AAB	YES
ABA	NO
BAA	NO

Οπότε $P_{2,1}=\frac{1}{3}$. Για $P_{3,1}$ έχουμε:

AAAB	YES
AABA	YES
ABAA	NO
BAAA	NO

Οπότε $P_{3,1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Για το $P_{3,2}$ μπορούμε να γράψουμε έναν παρόμοιο πίνακα, όπως προηγουμένως, μπορούμε όμως να σκεφτούμε και με όρους ακολουθιών. Ας σκεφτούμε ότι υπάρχει ένας σάκος με 5 φήφους, 3 ψήφους A και 2 ψήφους B από το οποίο τραβάμε ψήφους. Για να προηγείται συνεχώς ο A από τον B, οι δύο πρώτοι ψήφοι πρέπει να είναι του A. Αν και η τρίτη ψήφος είναι επίσης A, τότε ο A σίγουρα θα προηγείται του B. Αν η τρίτη ψήφος είναι του B, τότε η τέταρτη θα πρέπει να είναι του A. Οπότε έχουμε:

$$P_{3,2}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}.$$

Ή κάποιος θα μπορούσε πολύ έξυπνα να παρατηρήσει ότι υπάρχουν μονάχα δυο πιθανές ακολουθίες, ενώ το σύνολο των διακριτών ακολουθιών είναι $\frac{5!}{3!2!}=10$, άρα $P_{3,2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

Για την $P_{4,1}$, αφού υπάρχει μονάχα μια ψήφος για τον B, εφόσον έρθει μετά την δεύτερη θέση, ο A εγγυημένα πάντα θα προηγείται του B. Οπότε, από τις 5 πιθανές θέσεις που μπορεί να πάρει η ψήφος του B στην ακολουθία, 3 από αυτές είναι εντάξει. άρα $P_{4,1}=\frac{3}{5}$.

Για την $P_{4,2}$, οι πρώτες δύο ψήφοι πρέπει να είναι του A. Μετά από αυτό, η τρίτη ψήφος του A πρέπει να έρθει πρίν την δεύτερη ψήφο του B. Οπότε είτε η τρίτη ψήφος είναι του A ή η τρίτη ψήφος είναι του B και η τέταρτη του A, άρα:

$$P_{4,2}=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Για την $P_{4,3}$ οι ακολουθίες για τις οποίες ο A προηγείται του B είναι οι εξής πέντε: AAAABBB, AAABABB, AAAABBAB, AABAABB, AABABAB, άρα:

$$P_{4,3}=\frac{5}{\frac{7!}{4!3!}}=\frac{1}{7}.$$

(β) $P_{n,1}$ σημαίνει ότι ο B παίρνει μονάχα μια ψήφο. Αν αυτή η ψήφος έρθει μετά την δεύτερη ψήφο του A, τότε πάντα ο A θα προηγείται του B στην καταμέτρηση. Οπότε από τις $n+1$ πιθανές θέσεις που μπορεί να παρει ο B στην $(n+1)$–ακολουθία, ο B μπορεί όλες τις θέσεις, εκτός τις δυο πρώτες, άρα:

$$P_{n,1}=\frac{n-1}{n+1}.$$

Ομοίως, για $P_{n,2}$ ο B παίρνει δύο ψήφους και άρα από τις $n+2$ θέσεις στην $(n+2)$–ακολουθία, ο B μπορεί να καταλάβει δύο θέσεις. Ωστόσο, για να προηγείται ο A του

Β, τα δύο πρώτα στοιχεία πρέπει να τα καταλάβει ο Α, αφήνοντας στον Β n θέσεις να διαλέξει. Ακόμα, ο Β δεν μπορεί να επιλέξει και την τρίτη και την τέταρτη θέση. Λαμβάνοντας όλα αυτά υπόψιν μας, το συνολικό πλήθος του μπορεί να διαταχθούν δυο οι ψήφοι του Β, έτσι ώστε ο Α να προηγείται του Β στην καταμέτρηση είναι:

$$\binom{n}{2} - 1.$$

Το συνολικό πλήθος που μπορεί γενικά το Β να διαταχθεί σε μια $(n+2)$–ακολουθία είναι:

$$\binom{n+2}{2}.$$

Οπότε,

$$P_{n,2} = \frac{\binom{n}{2} - 1}{\binom{n+2}{2}} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} - 1}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} = \frac{n^2 - n - 2}{(n+2)(n+1)} = \frac{n-2}{n+2}.$$

(γ) Έστω S το γεγονός ότι ο Α προηγείται του Β κατά την καταμέτρηση $n+m$ ψήφους.

$$\begin{aligned}
P_{n,m} &= P(\text{τελευταία ψήφος είναι του A})P(S|\text{τελευταία ψήφος είναι του A}) \\
&\quad + P(\text{τελευταία ψήφος είναι του B})P(S|\text{τελευταία ψήφος είναι του B}) \\
&= P(\text{τελευταία ψήφος είναι του A})P_{n-1,m} + P(\text{τελευταία ψήφος είναι του B})P_{n,m-1} \\
&= \frac{n}{n+m}P_{n-1,m} + \frac{m}{n+m}P_{n,m-1}.
\end{aligned}$$