ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 1/11/2007 Ημερομηνία Παράδοσης: 15/11/2007

Άσκηση 1. Πόσους αναγραμματισμούς μπορούμε να κάνουμε στις παρακάτω λέξεις;
(α) children
(β) bookkeeper

Άσκηση 2. Το δελτίο καιρού μια δεδομένη μέρα μπορεί να λέει "ηλιοφάνεια", "συννεφιά", "βροχή" ή "χιόνι". Υποθέστε ότι υπάρχουν τέσσερις συνεχόμενες εποχές (φθινόπωρο, χειμώνας, άνοιξη, καλοκαίρι). Ακόμα υποθέστε ότι "χιόνι" μπορεί να έχουμε μόνο το χειμώνα, "βροχή" δεν μπορούμε να έχουμε το καλοκαίρι και ότι κάθε εποχή έχει 90 μέρες. Ποιος είναι ο αριθμός όλων των δυνατών ακολουθιών ημερήσιων δελτίων καιρού για ένα έτος (360 διαδοχικές μέρες) δεδομένου ότι οι εποχές έχουν συγκεκριμένη σειρά στο ημερολόγιο.

Άσκηση 3. Ένα κουτί περιέχει N αντικείμενα, K από τα οποία είναι ελαττωματικά. Ένα δείγμα από M αντικείμενα επιλέγεται τυχαία από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα ότι το δείγμα αυτό περιέχει τουλάχιστον ένα ελαττωματικό αντικείμενο όταν το δείγμα σχηματίζεται
(α) με επανατοποθέτηση;
(β) χωρίς επανατοποθέτηση;

Άσκηση 4. Μια τράπουλα που αποτελείται από 52 χαρτιά μοιράζεται σε τέσσερις παίκτες.

(α) Βρείτε την πιθανότητα ο πρώτος παίκτης να πάρει 13 σπαθιά.

(β) Βρείτε την πιθανότητα κάποιος παίκτης να πάρει 13 σπαθιά.

(γ) Θεωρείστε τα παρακάτω γεγονότα.
i. Ο πρώτος παίκτης παίρνει και τα 13 σπαθιά.
ii. Ο πρώτος παίκτης παίρνει τον Ρήγα κούπα.
Είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;

(δ) Θεωρείστε τα παρακάτω γεγονότα.
i. Τα φύλλα του πρώτου παίκτη έχουν όλα το ίδιο σχήμα.
ii. Ο πρώτος παίκτης παίρνει τον Ρήγα κούπα.
Είναι τα γεγονότα αυτά ανεξάρτητα;

Άσκηση 5. Ένας χώρος στάθμευσης περιέχει 100 αυτοκίνητα που φαίνονται όλα να είναι καλά. Όμως, K από αυτά είναι ελαττωματικά, όπου το K μπορεί να πάρει ισοπίθανα τις τιμές {0,1,...,9}. Επιλέγουμε στην τύχη 20 αυτοκίνητα για μια δοκιμή (test drive) και παρατηρούμε ότι κανένα δεν είναι ελαττωματικό. Δεδομένης της πληροφορίας αυτής, υπολογίστε την πιθανότητα ότι $K = 0$.

Άσκηση 6. Σε μια εκλογή, ο υποψήφιος A λαμβάνει n ψήφους, ενώ ο B λαμβάνει m ψήφους, όπου $n > m$. Υποθέστε ότι όλες οι $\frac{(n+m)!}{n!m!}$ δυνατές διατάξεις των ψήφων είναι ισοπίθανες. Έστω $P_{n,m}$ η πιθανότητα ότι κατά την καταμέτρηση των ψήφων, ο υποψήφιος A προηγείται πάντα του υποψήφιου B.

(α) Υπολογίστε τις $P_{2,1},\ P_{3,1},\ P_{3,2},\ P_{4,1},\ P_{4,2},\ P_{4,3}$. Για βοήθεια καταγράψτε όλες τις δυνατές διατάξεις των $m + n$ ψήφων για τις διάφορες τιμές των m και n.

(β) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P_{n,1},\ P_{n,2}$.

(γ) Εκφράστε αναδρομικά την πιθανότητα $P_{n,m}$ συναρτήσει των πιθανοτήτων $P_{n-1,m},\ P_{n,m-1}$ δεσμεύοντας ως προς το γεγονός "η τελευταία ψήφος κατά την καταμέτρηση είναι υπέρ του υποψήφιου A (B)".