ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινο εξάμηνο 2007
Διδάσκων: Παναγιώτης Τσακαλίσης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/10/2007 Ημερομηνία Παράδωσης: 12/11/2007

Άσκηση 1.

Τα σημεία του δειγματοχώρου της στρατηγικής για την επιλογή μονοπατιού από τον κυνηγό, που οδηγούν σε επιτυχής αποτέλεσμα είναι τα ακόλουθα:

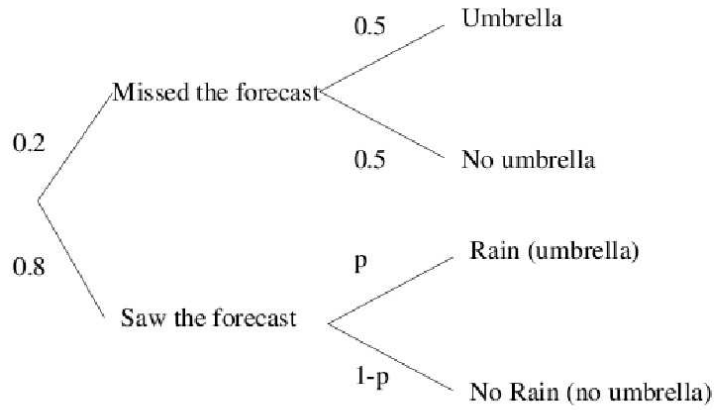
1. Και τα δύο σκυλία συμφωνούν στην επιλογή του μονοπατιού και είναι το σωστό μονοπάτι.
2. Τα σκυλιά διαφωνούν, το σκυλί 1 επιλέγει το σωστό μονοπάτι και ο κυνηγός ακολουθεί το σκυλί 1.
3. Τα σκυλιά διαφωνούν, το σκυλί 2 επιλέγει το σωστό μονοπάτι και ο κυνηγός ακολουθεί το σκυλί 2.

Τα παραπάνω γεγονότα είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε μπορούμε να προσθέσουμε τις πιθανότητές τους για να υπολογίσουμε την πιθανότητα με την οποία ο κυνηγός επιλέγει το σωστό μονοπάτι:

$$p^2 + \frac{1}{2} \cdot p(1-p) + \frac{1}{2} \cdot p(1-p) = p.$$

Όσο αφορά την στρατηγική ο κυνηγός να αφήσει ένα σκυλί να επιλέξει το μονοπάτι, η πιθανότητα να επιλεγεί το σωστό μονοπάτι είναι p. Συνεπώς και οι δύο προτινόμενες στρατηγικές είναι ισοδύναμες.

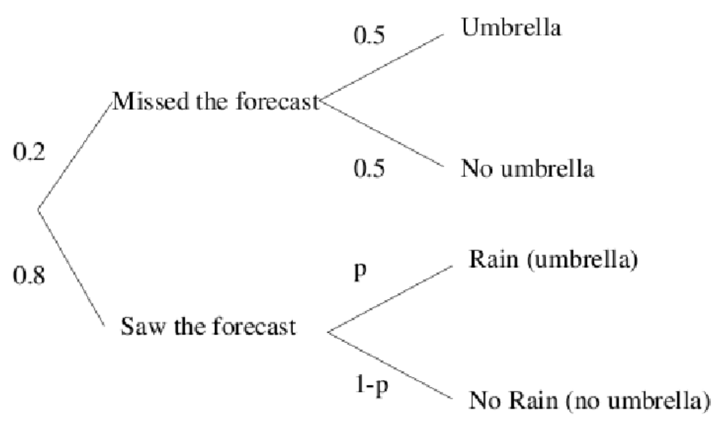
Άσκηση 2.



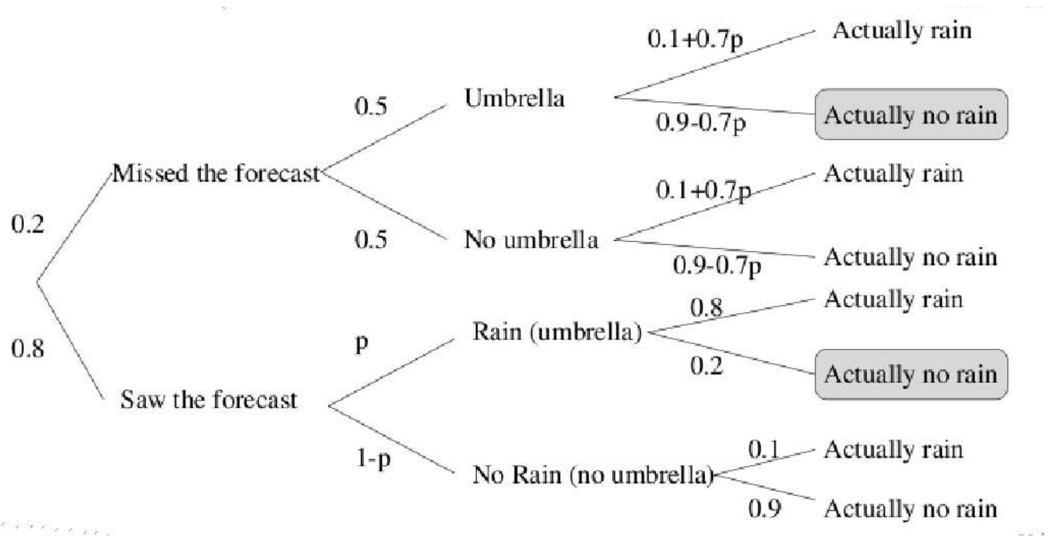
Σχήμα 1: Η δενδρική αναπαράσταση για την άσκηση 2, ερώτημα (α).

(α) Η δενδρική αναπαράσταση φαίνεται στο σχήμα 1. Έστω A το γεγονός ότι η πρόβλεψη του δελτίου καιρού ήταν 'Βροχή', B το γεγονός ότι έβρεξε και p η πιθανότητα ότι η πρόβλεψη του δελτίου καιρού ήταν 'Βροχή'. Αν είναι χειμώνας τότε $p = 0.7$ οπότε:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.8 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3} = \frac{56}{59}$$



Σχήμα 2: Η δενδρική αναπαράσταση για την άσκηση 2, ερώτημα (β).



Σχήμα 3: Η δενδρική αναπαράσταση για την άσκηση 2, ερώτημα (γ).

Ομοίως, αν είναι καλοκαίρι , $p = 0.2$ οπότε:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{0.8 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8} = \frac{2}{3}.$$

(β) Η δενδρική αναπαράσταση φαίνεται στο σχήμα 2. Έστω C το γεγονός ότι ο Κώστας κρατάει μαζί του ομπρέλλα και D το γεγονός ότι η πρόβλεψη του δελτίου καιρού είναι 'όχι βροχή'. Έχουμε τότε ότι :

$$\begin{aligned} P(D) &= 1 - p \\ P(C) &= 0.8p + 0.2 \cdot 0.5 = 0.8p + 0.1 \\ P(C|D) &= 0.8 \cdot 0 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.1. \end{aligned}$$

Όποτε $P(C) = P(C|D)$ αν και μόνο αν $p = 0$. Όμως p μπορεί να είναι μόνο 0.7 ή 0.2, το οποίο δηλώνει ότι C και D δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητα και αυτό το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την εποχή.

(γ) Ας υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα βροχής αν ο Κώστας δεν είδε το δελτίο καιρού.

$$P(\text{βρέχει}|\text{δεν είδε το δελτίο καιρού}) = 0.8p + 0.1 \cdot (1 - p) = 0.1 + 0.7p.$$

Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε το δένδρο από το ερώτημα (β) στο δενδρικό διάγραμμα του σχήματος 3. Οπότε δεδομένου ότι ο Κώστας δεν κρατούσε ομπρέλλα και δεν βρέχει, ενδιαμερόμαστε για τις δύο γραμμοσκιασμένες περιπτώσεις :

$$P(\text{είδε το δελτίο καιρού}|\text{πήρε ομπρέλλα και δεν βρέχει}) = \frac{0.8 \cdot 0.2 \cdot p}{0.8 \cdot 0.2 \cdot p + 0.2 \cdot 0.5 \cdot (0.9 - 0.7p)}$$

Το χειμώνα η πιθανότητα να βρέχει είναι $p = 0.7$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(\text{είδε το δελτίο καιρού}|\text{πήρε ομπρέλλα και δεν βρέχει}) = \frac{112}{153}$, ενώ το καλοκαίρι $p = 0.2$, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $P(\text{είδε το δελτίο καιρού}|\text{πήρε ομπρέλλα και δεν βρέχει}) = \frac{8}{27}$,

Άσκηση 3.

(α) Παρατηρούμε ότι $A \subset B$, οπότε $P(A \cap B) = P(A)$. Αυτό είναι ίσο με $P(A) \cdot P(B)$ μόνο όταν $P(B) = 1$ ή $P(A) = 0$. Στην περίπτωσή μας όμως είναι προφανές ότι $P(B) < 1$ και $P(A) > 0$. Συνεπώς $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, άρα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

(β) Δεδομένου του C το A θα συμβεί αν και μόνο αν η Μαρία γνωρίσει 5 άτομα κατά την δεύτερη εβδομάδα. Οπότε, $P(A|C) = 1/5$. Αν η Μαρία έκανε 5 φίλους κατά την πρώτη εβδομάδα, τότε σίγουρα θα κάνει πάνω από 5 φίλους συνολικά, άρα $P(B|C) = 1$. Αν το A συμβαίνει ότε και το B συμβαίνει οπότε $P(A \cap B|C) = P(A|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$. Άρα τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος C. Να παρατηρήσουμε ότι τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα χωρίς την συνθήκη.

(γ) Γνωρίζουμε ότι $P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$ εξόρισμού, και η ανεξαρτησία των γεγονότων υποδηλώνει ότι $P(A|C) = \frac{P(A) \cdot P(C)}{P(C)} = P(A)$. Άρα $P(A|C) = P(A)$ είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ελένξουμε την ανεξαρτησία, εφόσον $P(C) > 0$. Από το ερώτημα (β) υπολογίσαμε ότι $P(A|C) = 1/5$, ενώ $P(A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$. Οπότε A και C δεν είναι ανεξάρτητα. Επιπλέον υπολογίσαμε ότι $P(B|C) = 1$, αλλά είναι προφανές ότι $P(B) < 1$, άρα και τα B και C δεν είναι ανεξάρτητα.

(δ) Έστω F_i με $i = 1, \ldots, 5$ είναι το γεγονός ότι κατά την πρώτη εβδομάδα η Μαρία έκανε i φίλους. Ομοίως S_i είναι το γεγονός ότι κατά την δεύτερη εβδομάδα η Μαρία έκανε i φίλους.

Τέλος έστω T_j με $j = 2, \ldots, 10$ το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός των φίλων που έκανε η Μαρία μέσα στις δύο βδομάδες είναι j.

$$\begin{aligned} P(2 \text{ φίλους την 1η βδομαδα}|\, 6 \text{ φίλους στο σύνολο}) &= P(F_2|T_6) \\ &= \frac{P(T_6|F_2) \cdot P(F_2)}{P(T_6)} \\ &= \frac{P(S_4) \cdot P(F_2)}{\sum_{i=1}^{5} P(F_i \cap S_{(6-i)})} \\ &= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}} \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προήλθε με χρήση του κανόνα του Bayes, η τρίτη ισότητα από το ολικό θεώρημα Πιθανοτήτων, ενώ η τέταρτη ισότητα από το γεγονός ότι ο πλήθος των φίλων που κάνει η Μαρία κάθε βδομάδα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Ομοίως, $P(F_3|T_6) = 1/5$.

(ε)

$$P(F_2 \cup S_2|T_6) = P(F_2|T_6) + P(S_2|T_6) - P(F_2 \cap S_2|T_6) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{2}{5}$$

όπου για πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι πιθανότητες υπό συνθήκη ικανοποιούν όλα τα αξιώματα των πιθανοτήτων, $P(F_2|T_6)$ έχει βρεθεί παραπάνω ότι είναι $1/5$, και εφόσον οι βδομάδες κατανέμονται ομοιόμορφα $P(S_2|T_6)$ είναι $1/5$.

$$\begin{aligned} P(F_3 \cup S_3|T_6) &= P(F_3|T_6) + P(S_3|T_6) - P(F_3 \cap S_3|T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - P(S_3|F_3 \cap T_6) \cdot P(F_3|T_6) \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα βγάζει νόημα, εφόσον υπάρχει μόνο ένας τρόπος να συναντήσει 6 άτομα, έχωντας συναντήσει 3 άτομα σε τουλάχιστον μια εβδομάδα, ενώ υπάρχουν 2 τρόποι να γνωρίσεις 6 άτομα έχωντας γνωρίσει 2 σε τουλάχιστον μια εβδομάδα. Η παραπάνω πιθανότητα είναι το μισό της πιθανότητας του πρώτου γεγονότος που ήταν $2/5$.

Άσκηση 4.

Έστω A το γεγονός ότι χρειάζεται να γίνει δεύτερος γύρος, B το γεγονός ότι ο Κώστας είναι νικητής του πρώτου γύρου, Εστω C το γεγονός ότι ο Αντώνης είναι πρωταθλητής ξανά, D το γεγονός ότι η Μαρία είναι νικήτρια του πρώτου γύρου και E το γεγονός να έγινε μόνο ένας αγώνας στο δεύτερο γύρο. Τότε οι ζητούμενες πιθανότητες είναι:

(α) **(i)** $P(A) = 0.6^2 + 0.4^2 = 0.52$.

(ii) $P(B) = 0.6^2 = 0.36$.

(iii) $P(C) = 1 - P(B) - P(D) = 1 - 0.6^2 \cdot 0.5^2 - 0.4^2 \cdot 0.3^2 = 0.8956$.

(β) **(i)** $P(B|A) = \frac{0.6^2}{0.52} = \frac{0.36}{0.52} = 0.6923$.

(ii)

$$\begin{aligned} P(C|A) &= P(C|B, A) \cdot P(B|A) + P(C|D, A) \cdot P(D|A) \\ &= (1 - 0.5^2) \cdot 0.6923 + (1 - 0.3^2) \cdot 0.3077 \\ &= 0.7992 \end{aligned}$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(B|A \cap E) &= = \frac{0.6^2 \cdot 0.5^2}{0.6^2 \cdot 0.5 + 0.4^2 \cdot 0.7} \\ &= \frac{0.6^2 \cdot 0.5}{0.2920} \\ &= 0.6164 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.

Πρώτη προσέγγιση: Ανάθεσε τον Κώστα σε ένα τμήμα. Δεδομένου την θέση του Κώστα, έστω K, η πιθανότητα η Μαρία να βρίσκεται στο ίδιο τμήμα είναι $\frac{29}{89}$.

Δεύτερη προσέγγιση: Υπάρχουν τρια διαφορετικά τμήματα στα οποία μπορούν ο Κώστας και η Μαρία να βρίσκονται μαζί. Κρατώντας τον Κώστα και την Μαρία μαζί στο τμήμα 1, υπάρχουν $\binom{88}{28}$ διαφορετικοί τρόποι για να συμπληρώσεις το τμήμα 1 (εφόσον υπάρχουν 88 μαθητές που δεν έχουν τοποθετηθεί και μονάχα 28 θέσεις κενές στο τμήμα 1). Το τμήμα 2 κατόπιν μπορεί να συμπληρωθεί με $\binom{60}{30}$ τρόπους, ενώ το τμήμα 3 με $\binom{30}{30}$ διαφορετικούς τρόπους. Οπότε έχουμε $\binom{88}{28}\binom{60}{30}\binom{30}{30}$ τρόπους να κρατήσουμε τον Κώστα με την Μαρία μαζί στο τμήμα 1.

Μπορούν ακόμα να βρίσκονται μαζί στο τμήμα 2 ή στο τμήμα 3. Οπότε όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί όπου μπορούν να είναι μαζί είναι: $3\binom{88}{28}\binom{60}{30}\binom{30}{30}$. Το συνολικό πλήθος τρόπων να χωρισεις τον Κώστα και την Μαρία (χωρίς να του κρατήσεις μαζί) είναι : $\binom{90}{30}\binom{60}{30}\binom{30}{30}$. Οπότε η επιθυμητή πιθανότητα είναι: $\frac{3\binom{88}{28}\binom{60}{30}\binom{30}{30}}{\binom{90}{30}\binom{60}{30}\binom{30}{30}} = \frac{3\cdot 30\cdot 29}{90\cdot 89} = \frac{29}{89}$.

Άσκηση 6.

(α) **(i)** Το γεγονός ότι το Α ζάρι κερδίζει το Β ζάρι συμβαίνει μόνο όταν το ζάρι Α φέρει 4. Αυτό συμβαίνει με πιθανότατα $4/6 = 2/3$.

(ii) Το γεγονός ότι το Β ζάρι κερδίζει το Γ ζάρι συμβαίνει μόνο όταν το ζάρι Γ φέρει 2. Αυτό συμβαίνει με πιθανότατα $4/6 = 2/3$.

(iii) Το γεγονός ότι το Γ ζάρι κερδίζει το Δ ζάρι συμβαίνει είτε όταν το Γ ζάρι φέρει 6, το οποίο συμβαίνει με πιθανότατα $2/6$, ή όταν φέρει 2 και το Δ ζάρι φέρει 1. Οπότε η επιθυμητή πιθανότητα είναι: $2/6 + (4/6)\cdot(1/2) = 2/3$.

(iv) Το γεγονός το ζάρι Δ να κερδίσει το ζάρι Α συμβαίνει όταν είτε το Δ φέρει 5, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα $1/2$, ή όταν φέρει 2 και το Δ ζάρι φέρει 1. Οπότε η επιθυμητή πιθανότητα είναι $1/2 + (1/2)\cdot(4/6) = 2/3$.

(β) Το αποτέλεσμα μοίαζει αφύσικο με την πρώτη ματιά. Κάθε ένας μπορεί να σκεφτεί το εξής: εάν το Α ζάρι είναι πιο πιθανό να νικήσει το Β ζάρι (παρά το αντίθετο), και το Β να νικήσει το Γ, και ούτο καθέξης εως το Δ, τότε το Α είναι πιο πιθανό να νικήσει και το Δ, παρά να συμβεί το αντίθετο. Παρόλο αυτό δεν είναι σωστός τρόπος σκέψης, εξαιτίας της περίεργης κατασκευής των γεγονότων και τα παραπάνω αποτελέσματα είναι σωστά.

(γ) Επέλεξε το ζάρι που είναι ένα βήμα χαμηλότερα από το ήδη επιλεγμένο ζάρι. Αυτό σημαίνει ότι επέλεξε το ζάρι Α, αν ο πρώτος παίκτης επιλέξει το ζάρι Β. Αντίστοιχα επέλεξε το ζάρι Β, Γ και Δ για τις περιπτώσεις που το ήδη επιλεγμένο ζάρι είναι το Γ, Δ και Α αντίστοιχα.