

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ  
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2007  
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 19/10/2007

Ημερομηνία Παράδοσης: 1/11/2007

**Άσκηση 1.** Ένας κυνηγός έχει δύο κυνηγετικά σκυλιά. Μια μέρα καθώς κυνηγούν, φτάνουν σε ένα σημείο όπου ο δρόμος διακλαδίζεται σε δύο μονοπάτια. Κάθε σκυλί, ανεξάρτητα από το άλλο, διαλέγει το σωστό μονοπάτι (που οδηγεί στο λαγό) με πιθανότητα  $p$ . Όταν τα δύο σκυλιά διαλέγουν το ίδιο μονοπάτι, ο κυνηγός τα ακολουθεί. Όταν τα σκυλιά διαλέγουν διαφορετικά μονοπάτια το καθένα, ο κυνηγός επιλέγει την πορεία του ρίχνοντας ένα δίκαιο κέρμα. Ορίστε επακριβώς το δειγματοχώρο της στρατηγικής για την επιλογή μονοπατιού από τον κυνηγό. Είναι αυτή η στρατηγική καλύτερη από το να άφηνε ένα σκυλί να επιλέξει μονοπάτι;

**Άσκηση 2.** Πριν φύγει για τη δουλειά το πρωί, ο Κώστας ακούει το δελτίο καιρού ώστε να αποφασίσει αν θα πάρει ομπρέλα μαζί του. Εάν η πρόβλεψη είναι "βροχή", τότε η πιθανότητα όντως να βρέξει είναι 80%. Εάν η πρόβλεψη είναι "όχι βροχή", τότε η πιθανότητα να βρέξει είναι 10%. Το φθινόπωρο και το χειμώνα, 7 στις 10 μέρες η πρόβλεψη λέει ότι θα βρέξει ενώ την άνοιξη και το καλοκαίρι, 2 στις 10 μέρες υπάρχει πρόβλεψη βροχής. Στα παρακάτω χρησιμοποιείστε δενδρικά διαγράμματα για να βοηθηθείτε στις απαντήσεις σας.

(α) Μια μέρα ο Κώστας δεν πρόλαβε να ακούσει το δελτίο καιρού και έβρεξε. Ποιά είναι η πιθανότητα η πρόβλεψη στο δελτίο καιρού να ήταν "βροχή" εάν ήταν χειμώνας; Ποιά είναι η πιθανότητα η πρόβλεψη να ήταν "βροχή" εάν ήταν καλοκαίρι;

(β) Η πιθανότητα ο Κώστας να μην ακούσει το δελτίο καιρού μία τυχαία μέρα του χρόνου είναι 0.2. Εάν δεν το ακούσει, ο Κώστας ρίχνει ένα κέρμα για να αποφασίσει αν θα πάρει μαζί του ομπρέλα ή όχι. Όταν ακούει το δελτίο και η πρόβλεψη είναι "βροχή" πάντα παίρνει ομπρέλα, ενώ όταν πρόβλεψη είναι "όχι βροχή" δεν παίρνει ποτέ. Είναι τα γεγονότα "Ο Κώστας παίρνει ομπρέλα" και "Η πρόβλεψη είναι όχι βροχή" ανεξάρτητα; Εξαρτάται η απάντηση από την εποχή;

(γ) Ο Κώστας πήρε ομπρέλα και δεν βρέχει. Ποιά είναι η πιθανότητα να είδε το δελτίο καιρού; Εξαρτάται η πιθανότητα αυτή από την εποχή;

**Άσκηση 3.** Η Μαρία είναι πρωτοετής στο Πανεπιστήμιο και κάθε εβδομάδα κάνει από μία έως πέντε νέες γνωριμίες με ίση πιθανότητα. Ο αριθμός των γνωριμιών της κάθε εβδομάδα είναι ανεξάρτητος από τις άλλες εβδομάδες. Ενδιαφερόμαστε για το τι γίνεται σε δύο συνεχόμενες εβδομάδες. Έστω  $A$  το γεγονός ότι η Μαρία να έκανε 10 νέες γνωριμίες σε δύο συνεχόμενες εβδομάδες και  $B$  το γεγονός ότι η Μαρία έκανε πάνω από 5 γνωριμίες σε δύο συνεχόμενες εβδομάδες.

(α) Είναι τα γεγονότα  $A$  και  $B$  ανεξάρτητα;

(β) Έστω  $\Gamma$  το γεγονός ότι η Μαρία να έκανε ακριβώς 5 γνωριμίες την πρώτη εβδομάδα. Είναι τα  $A$  και  $B$  ανεξάρτητα δεδομένου του γεγονότος  $\Gamma$ ;

(γ) Είναι τα A και Γ ανεξάρτητα; Είναι τα B και Γ ανεξάρτητα;

(δ) Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε 6 γνωριμίες σε δύο εβδομάδες, ποιά είναι η πιθανότητα να έκανε 2 γνωριμίες την πρώτη εβδομάδα; Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε 3 γνωριμίες τις δύο εβδομάδες, ποιά είναι η πιθανότητα να έκανε 2 γνωριμίες την πρώτη εβδομάδα;

(ε) Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε 6 γνωριμίες τις δύο εβδομάδες, ποιά είναι η πιθανότητα να έκανε 2 γνωριμίες σε τουλάχιστον μια εβδομάδα; Δεδομένου ότι η Μαρία έκανε 6 γνωριμίες τις δύο εβδομάδες, ποιά είναι η πιθανότητα να έκανε 3 γνωριμίες σε τουλάχιστον μια εβδομάδα;

**Άσκηση 4.** Αυτή τη χρονιά ο νέος πρωταθλητής στο σκάκι επιλέγεται σύμφωνα με την παρακάτω διαδικασία. Ο Κώστας και η Μαίρη παίζουν πρώτα μεταξύ τους δύο παιχνίδια. Όποιος από τους δύο κερδίσει και στα δύο παιχνίδια, αγωνίζεται στον δεύτερο γύρο με τον Αντώνη, τον περυσινό πρωταθλητή. Ο Αντώνης διατηρεί τον τίτλο του πρωταθλητή εκτός αν χρειαστεί δεύτερος γύρος και ο αντίπαλός του τον κερδίσει και στα δύο παιχνίδια. Εάν ο Αντώνης κερδίσει στο πρώτο παιχνίδι του δεύτερου γύρου, τότε δεν χρειάζεται δεύτερο παιχνίδι και είναι και πάλι πρωταθλητής. Ακόμα γνωρίζουμε ότι:

Η πιθανότητα ο Κώστας να κερδίσει τη Μαρία σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.6.

Η πιθανότητα ο Αντώνης να κερδίσει τον Κώστα σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.5.

Η πιθανότητα ο Αντώνης να κερδίσει τη Μαρία σε κάποιο παιχνίδι είναι 0.7.

Υποθέστε ότι δεν υπάρχει ισοπαλία και ότι όλα τα παιχνίδια είναι ανεξάρτητα.

(α) Βρείτε τις εκ των προτέρων πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων.

i. Να χρειαστεί δεύτερος γύρος.

ii. Ο Κώστας είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.

iii. Ο Αντώνης είναι και πάλι πρωταθλητής.

(β) Δεδομένου ότι χρειάζεται να γίνει και ο δεύτερος γύρος, βρείτε τις δεσμευμένες πιθανότητες των παρακάτω γεγονότων.

i. Ο Κώστας είναι ο νικητής του πρώτου γύρου.

ii. Ο Αντώνης είναι και πάλι πρωταθλητής.

(γ) Δεδομένου ότι γίνεται ο δεύτερος γύρος και ότι έγινε μόνο ένας αγώνας στον γύρο αυτό, ποια είναι η δεσμευμένη πιθανότητα ότι ο Κώστας κέρδισε στον πρώτο γύρο;

**Άσκηση 5.** 90 μαθητές, συμπεριλαμβανομένων της Μαρίας και του Κώστα, χωρίζονται τυχαία σε τρία τμήματα με τον ίδιο αριθμό μαθητών το καθένα. Ποιά η πιθανότητα η Μαρία και ο Κώστας να είναι στο ίδιο τμήμα;

**Άσκηση 6.** Έστω 4 ζάρια A, B, Γ και Δ. Τα ζάρια αυτά έχουν 6 πλευρές και η πιθανότητα να έρθει οποιαδήποτε πλευρά είναι  $1/6$ . Όμως τα ζάρια αυτά δεν είναι κανονικά καθώς τα νούμερα στις 6 πλευρές τους είναι τα εξής:

A: 0,0,4,4,4,4    B: 3,3,3,3,3,3    Γ: 2,2,2,2,6,6    Δ: 1,1,1,5,5,5

Σε ένα παιχνίδι τύχης, ο ένας παίκτης επιλέγει ένα ζάρι και το ρίχνει και ο δεύτερος παίκτης επιλέγει ένα διαφορετικό ζάρι και το ρίχνει. Όποιος φέρει μεγαλύτερο αριθμό κερδίζει.

- (α) i. Βρείτε την πιθανότητα το ζάρι A να κερδίσει το B.  
ii. Βρείτε την πιθανότητα το ζάρι B να κερδίσει το Γ.  
iii. Βρείτε την πιθανότητα το ζάρι Γ να κερδίζει το Δ.  
iv. Βρείτε την πιθανότητα το ζάρι Δ να κερδίζει το A.

(β) Υπάρχει κάτι ασυνήθιστο στην απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα; Εξηγείστε.

(γ) Ο πρώτος παίκτης επιλέγει ένα ζάρι και κατόπιν ο δεύτερος επιλέγει ένα από τα υπόλοιπα 3. Δείξτε ότι εάν ο δεύτερος παίκτης επιλέξει έξυπνα το ζάρι του, κερδίζει με πιθανότητα  $2/3$ , ανεξάρτητα από το ποιο ζάρι επέλεξε ο πρώτος. Εάν ο πρώτος επιλέξει το A, ποιο ζάρι πρέπει να επιλέξει ο δεύτερος για να κερδίσει; Εάν ο πρώτος επιλέξει το B, ή το Γ ή το Δ, ποιο ζάρι πρέπει να επιλέξει ο δεύτερος για να κερδίσει;