Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Λύσεις Προόδου
25-11-2006

Θέμα 1

(α) $1 - P(A \cup B^c) = P(B) - P(A \cap B)$, αφού
$1 - P(A \cup B^c) = P((A \cup B^c)^c) = P(A^c \cap B)$ [De Morgan]
$= P(B) - P(A \cap B)$ [διαφορά γεγονότων]

(β) $P(A|B) \leq \frac{P(B|A)}{P(B)}$, αφού
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \leq \frac{P(B|A)}{P(B)}$ [καθώς $P(A) \leq 1$]

(γ) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \cdot P(A^c)$ (A, B ανεξάρτητα), αφού

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \text{ [}A,B\text{: ανεξάρτητα]} \\ &= P(A) + P(B) \cdot (1 - P(A)) \\ &= P(A) + P(B) \cdot P(A^c) \end{aligned}$$

(δ) $p_X(x) \leq 1$, καθώς οι τιμές της συνάρτησης πιθανότητας είναι ≤ 1 ως πιθανότητες γεγονότων, $P(X = x)$.

(ε) $E[X^2] \geq (E[X])^2$, καθώς
$0 \leq var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

Θέμα 2

(α) Η πιθανότητα, P_1, ότι ο παίκτης #2 κερδίζει την πρώτη φορά που ρίχνει το ζάρι, ισούται με την πιθανότητα του γεγονότος ότι ο παίκτης #1 δεν έφερε 6 **ΚΑΙ** ο παίκτης #2 έφερε 6:

$$P_1 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0.14$$

(β) Η πιθανότητα, P_2, ότι ο παίκτης #2 κερδίζει τη δεύτερη φορά που ρίχνει το ζάρι ισούται με την πιθανότητα του γεγονότος ότι οι πρώτες 7 ρίψεις του ζαριού (από τους παίκτες #1 έως #6 και από τον #1 τη δεύτερη φορά) δεν έφεραν 6 **ΚΑΙ** ο παίκτης #2 έφερε 6 τη δεύτερη φορά:

$$P_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \frac{1}{6} = 0.0465$$

(γ) Με ανάλογο συλλογισμό, αν P_n είναι η πιθανότητα ότι ο παίκτης #2 κερδίζει την n-οστή φορά που ρίχνει το ζάρι, τότε:

$$P_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)+1} \cdot \frac{1}{6}$$

(δ) Προφανώς, η πιθανότητα P ότι ο παίκτης #2 κερδίζει σε κάποια ρίψη θα είναι:

$$\begin{aligned} P = & \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{6(n-1)+1} \cdot \frac{1}{6} \\ = & \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^6\right]^n \\ = & \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(5/6)^6} = 0.21 \end{aligned}$$

Θέμα 3

Έστω X το πλήθος των κεφαλών σε 4 ρίψεις του κέρματος. Προφανώς, X είναι Διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους $n = 4$ και $p = 0.4$. Η συνάρτηση πιθανότητας (ς.π.) της X είναι:

$$p_X(k) = \binom{4}{k}(0.4)^k(0.6)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Σύμφωνα με τη στρατηγική (i) το κέρδος του Νίκου είναι X.
Σύμφωνα με τη στρατηγική (ii) το κέρδος του Νίκου είναι $Y = X^2 - 1.5X$.

(α) Έχουμε ότι:

$$E[X] = np = 4 \cdot 0.4 = 1.6$$

Επίσης, $var(X) = np(1-p) = 4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = 0.96$, οπότε

$$\begin{aligned} E[X^2] = & \ var(X) + \Big(E[X]\Big)^2 = np(1-p) + (np)^2 \\ = & \ 0.96 + 1.6^2 = 3.52 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} E[Y] = & \ E[X^2 - 1.5X] = E[X^2] - 1.5E[X] \\ = & \ 3.52 - 1.5 \cdot 1.6 \\ \Rightarrow & \ E[Y] = 1.12 < 1.6 = E[X] \end{aligned}$$

και συνεπώς, η στρατηγική (i) είναι πιο συμφέρουσα.

(β) Στη γενική περίπτωση ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} E[X] > E[Y] \Rightarrow \\ np > np(1-p) + (np)^2 - 1.5np \Rightarrow \\ n(1-n)p^2 + 1.5np > 0 \Rightarrow \\ (1-n)p^2 + 1.5p > 0 \Rightarrow \\ -3p^2 + \frac{3}{2}p > 0 \Rightarrow \\ p(p - \frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \\ 0 < p < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Θέμα 4

(α)

$$p_X(x) = \sum_{y=1}^{3} p_{X,Y}(x,y),\ x = 1,2,3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_X(x) = \begin{cases} 4/9, & x = 1 \\ 3/9, & x = 2 \\ 2/9, & x = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3} x p_X(x) = 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{16}{9}$$

(β) Ομοίως,

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{3} p_{X,Y}(x,y),\ y = 1,2,3$$

Από τον πίνακα τιμών της $p_{X,Y}(x,y)$ προκύπτει εύκολα ότι:

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/9, & y = 1 \\ 3/9, & y = 2 \\ 4/9, & y = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{3} y p_Y(y) = 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$$

(γ) Έχουμε ότι:

$$P_{Y|A}(y) = \frac{P(Y = y,\ A)}{P(A)}$$

όπου,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \leq 2) = \sum_{i=1}^{2} p_X(x) \\ &= p_X(1) + p_X(2) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \\ &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

- $\{Y = 1\} \cap \{X \leq 2\} = \Big\{(1,1),\ (2,1)\Big\}$. Άρα,
  $P(Y = 1,\ A) = p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(2,1) = \frac{1}{9} + 0 = \frac{1}{9}$
- $\{Y = 2\} \cap \{X \leq 2\} = \Big\{(1,2),\ (2,2)\Big\}$. Άρα,
  $P(Y = 2,\ A) = p_{X,Y}(1,2) + p_{X,Y}(2,2) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$

- $\{Y=3\} \cap \{X \leq 2\} = \Big\{(1,3),\,(2,3)\Big\}$. Άρα,
  $P(Y=3,\,A) = p_{X,Y}(1,3) + p_{X,Y}(2,3) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$

Άρα, θα είναι:

$$p_Y|A(y) = \begin{cases} 1/7, & y=1 \\ 3/7, & y=2 \\ 3/7, & y=3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

Επίσης, ισχύει ότι:

$$E[Y|A] = \sum_{y=1}^{3} y\, p_{Y|A}(y) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{7}$$

$$E[Y^2|A] = \sum_{y=1}^{3} y^2\, p_{Y|A}(y) = 1^2 \cdot \frac{1}{7} + 2^2 \cdot \frac{3}{7} + 3^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{40}{7}$$

$$var(Y|A) = E[Y^2|A] - \Big(E[Y|A]\Big)^2 = \frac{40}{7} - \Big(\frac{16}{7}\Big)^2 = \frac{24}{49} = 0.49$$

(δ) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[3X+2Y+7] = 3E[X] + 2E[Y] + 7 \\ &= 3 \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot \frac{20}{9} + 7 \\ &= \frac{151}{9} \\ &= 16.78 \end{aligned}$$

(ε) Καθώς οι $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, θα είναι:

$$p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y) = p_{\tilde{X}} \cdot p_{\tilde{Y}}(y), \;\; x,y = 1,2,3.$$

όπου οι $p_{\tilde{X}}(x)$ και $p_{\tilde{Y}}(y)$ ακολουθούν τις εκφράσεις στα (α) και (β). Οι τιμές της $p_{\tilde{X},\tilde{Y}}(x,y)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

	$\tilde{Y}$=1	$\tilde{Y}$=2	$\tilde{Y}$=3
$\tilde{X}$=1	8/81	12/81	16/81
$\tilde{X}$=2	6/81	9/81	12/81
$\tilde{X}$=3	4/81	6/81	8/81