

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
25 Νοεμβρίου 2006 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες: Βασικές (αν)ισότητες.

Στις επόμενες πέντε προτάσεις, αντικαταστήστε το **vs.** με κάποιο από τα σύμβολα $=$, $\leq$, $\geq$. Αιτολογείστε την απάντησή σας.

- (α) $1 - P(A \cup B^c)$ vs. $P(B) - P(A \cap B)$.
- (β) $P(A/B)$ vs. $\frac{P(B/A)}{P(B)}$.
- (γ) $P(A \cup B)$ vs. $P(A) + P(B)P(A^c)$ όταν τα A και B είναι ανεξάρτητα.
- (δ) $p_X(x)$ vs. 1.
- (ε) $E[X^2]$ vs. $(E[X])^2$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες: Ένα απλό σειριακό πείραμα τύχης.

Έξι παίκτες κάθονται γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι και ρίχνουν με τη σειρά ένα δίκαιο εξαέδρο ζάρι. Ξεκινά ο παίκτης #1, ακολουθεί ο παίκτης #2, κτλ. Το παιχνίδι συνεχίζεται μέχρις ότου έρθει το πρώτο εξάρι και ο παίκτης που το φέρνει κερδίζει το παιχνίδι. Απαντήστε στα ακόλουθα:

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι ο παίκτης #2 κερδίζει την πρώτη φορά που ρίχνει το ζάρι;
- (β) Ποια η πιθανότητα ότι ο παίκτης #2 κερδίζει την δεύτερη φορά που ρίχνει το ζάρι;
- (γ) Ποια η πιθανότητα ότι ο παίκτης #2 κερδίζει την n -στή φορά που ρίχνει το ζάρι;
- (δ) Ποια η πιθανότητα ότι ο παίκτης #2 κερδίζει το παιχνίδι;

Βοήθεια: Στο υποερώτημα (δ), χρησιμοποιείτε τη σχέση για τη γεωμετρική πρόοδο: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, $|a| < 1$.

Θέμα 3 - 25 μονάδες: Δοκιμές Bernoulli και μετασχηματισμοί τ.μ.

Είναι χειμώνας στο Ηράκλειο και δύο συμφοιτητές και συγγάτοικοι, ο Κώστας και ο Νίκος, αποφασίζουν να παίξουν το εξής παιχνίδι. Ο Νίκος θα ρίξει διαδοχικά 4 φορές ένα κέρμα (πιθανότητα κεφαλής ίση με 0.4). Πριν τις ρίψεις θα πρέπει να αποφασίσει μεταξύ δύο επιλογών: i) να κερδίσει σε ευρώ ποσό, X , ίσο με το πλήθος των κεφαλών που θα φέρει, ή ii) να κερδίσει σε ευρώ ποσό, Y , ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των κεφαλών μείον 1.5 φορές το πλήθος των κεφαλών που θα φέρει.

- (α) Ποια είναι η πιο συμφέρουσα στρατηγική για το Νίκο; Δηλαδή, ποια στρατηγική μεγιστοποιεί το μέσο αναμενόμενο κέρδος του;
- (β) Στη γενική περίπτωση όπου η πιθανότητα να έρθει κεφαλή είναι p , για ποιο εύρος τιμών του p είναι πιο συμφέρουσα η στρατηγική i) από την ii);

Θέμα 4 - 25 μονάδες: Από κοινού συναρτήσεις πιθανότητας.

Θεωρείστε τις δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) όπως φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
$X = 2$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$X = 3$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

- (α) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_X(x)$ της τ.μ. X . Υπολογίστε την μέση τιμή της X , $E[X]$.
- (β) Υπολογίστε την περιθωριακή σ.π. $p_Y(y)$ της τ.μ. Y . Υπολογίστε την μέση τιμή της Y , $E[Y]$.
- (γ) Υπολογίστε την δεσμευμένη σ.π. της τ.μ. Y , $p_{Y/A}(y)$, δεδομένου του γεγονότος $A = \{X \leq 2\}$. Ποια είναι η μέση τιμή, δεύτερη ροπή, και διασπορά της τ.μ. Y δεδομένου του A , δηλαδή ποια είναι τα $E[Y/A]$, $E[Y^2/A]$, και $\text{var}(Y/A)$, αντίστοιχα;
- (δ) Έστω η τ.μ. $Z = g(X, Y) = 3X + 2Y + 7$. Υπολογίστε τη μέση τιμή της τ.μ. Z .
- (ε) Έστω η τ.μ. $\tilde{X}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. X και η τ.μ. $\tilde{Y}$ με την ίδια σ.π. όπως η τ.μ. Y . Έστω ότι οι τ.μ. $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ είναι ανεξάρτητες. Υπολογίστε την από κοινού σ.π. των $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$.