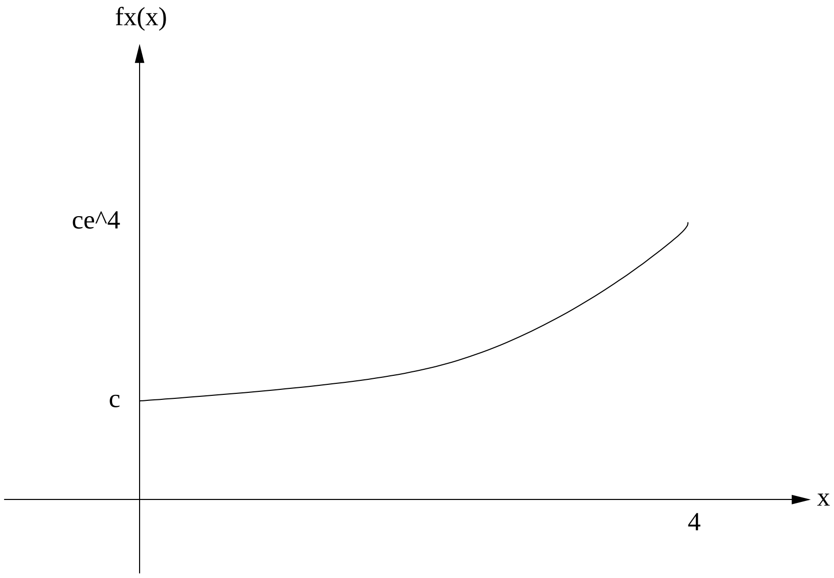
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Τελικής Εξέτασης
Διδάσκων: Π.Τσακαλίδης
7 Σεπτεμβρίου 2007 – Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1

(αi) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας φαίνεται στο σχήμα 1 και η σταθερά c έχει τιμή:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{4} ce^{x}dx = 1 \Rightarrow ce^{x}|_0^4 = 1 \Rightarrow c(e^4 - 1) = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e^4 - 1}$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του 1ο θέματος, ερώτημα (αi).

(αii)

$$\begin{aligned} P(X > 3|2 \leq X \leq 6) &= \frac{P(X > 3 \cap 2 \leq X \leq 6)}{P(2 \leq X \leq 6)} = \frac{P(3 < X \leq 4)}{P(2 \leq X \leq 4)} \\ &= \frac{\int_3^4 ce^x dx}{\int_2^4 ce^x dx} = \frac{e^4 - e^3}{e^4 - e^2} = \frac{e^2 - e}{e^2 - 1} = \frac{e(e-1)}{(e+1)(e-1)} = \frac{e}{e+1} \end{aligned}$$

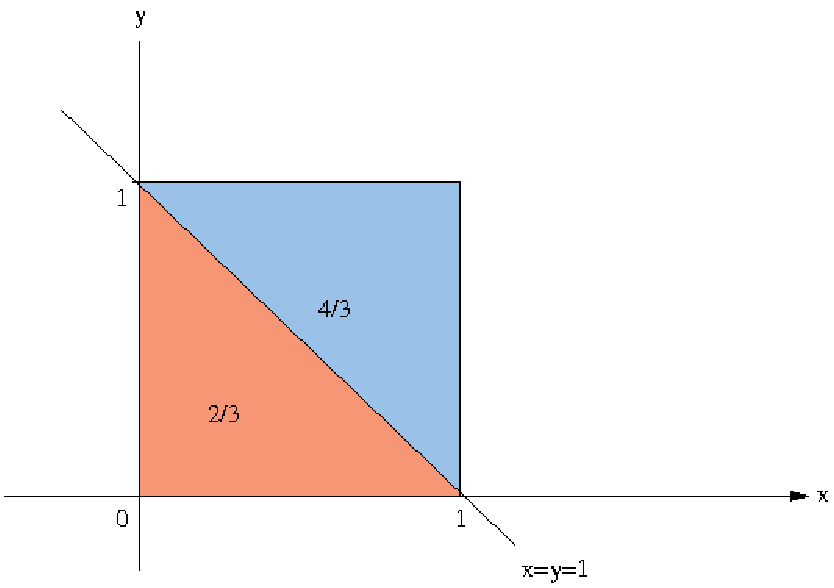
(αiii)

$$P(2 \leq X \leq 6|X > 3) = \frac{P(2 \leq X \leq 6 \cap X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(3 < X \leq 4)}{P(3 < X \leq 4)} = 1$$

(βi) Η γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y φαίνεται στο σχήμα 2.

(βii) Η γραφική παράσταση της περιθωριακής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X φαίνεται στο σχήμα 3. Επιπλέον έχουμε

$$f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. X και Y του θέματος 1, ερώτημα (βi).

Για $0 \leq x \leq 1$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{1-x} \frac{2}{3} dy + \int_{1-x}^{1} \frac{4}{3} dy \\
&= \frac{2}{3} y|_0^{1-x} + \frac{4}{3} y|_{1-x}^{1} \\
&= \frac{2}{3}(1-x) + \frac{4}{3}(1-1+x)
\end{aligned}
$$

Άρα

$$
f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(1+x)}{3} & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}
$$

(βiii) Έχουμε ότι:

$$
f_{Y/X}\left(y|\frac{2}{3}\right) = \frac{f_{X,Y}(\frac{2}{3}, y)}{f_X(\frac{2}{3})}
$$

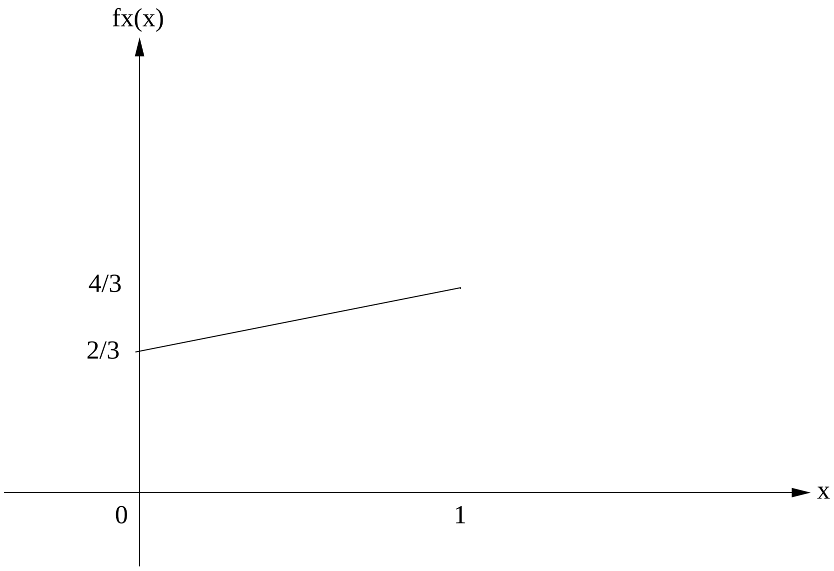
και

$$
f_X(2/3) = \frac{2(1+2/3)}{3} = \frac{10}{9}
$$

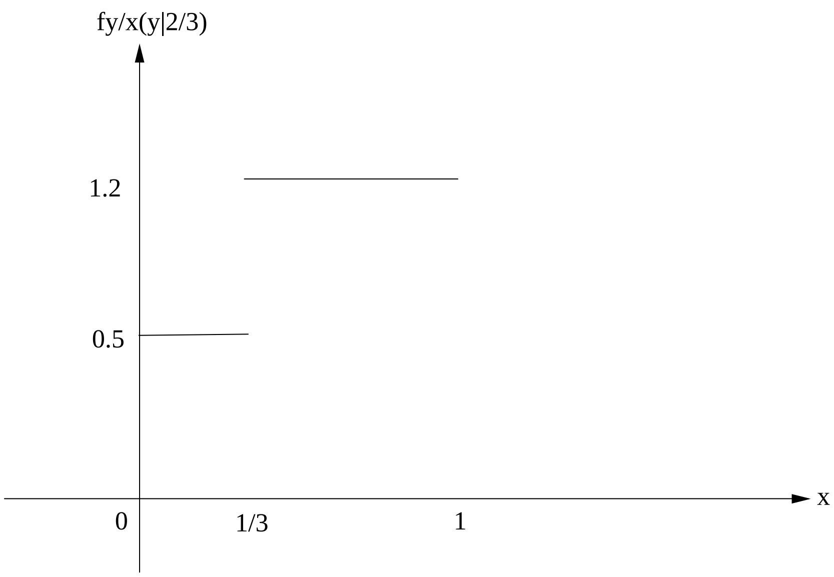
Οπότε έχουμε ότι:

$$
f_{Y/X}\left(y|\frac{2}{3}\right) = \begin{cases} \frac{2/3}{10/9} & , 0 \leq y \leq \frac{1}{3} \\ \frac{4/3}{10/9} & , \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 0.6 & , 0 \leq y \leq \frac{1}{3} \\ 1.2 & , \frac{1}{3} \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}
$$

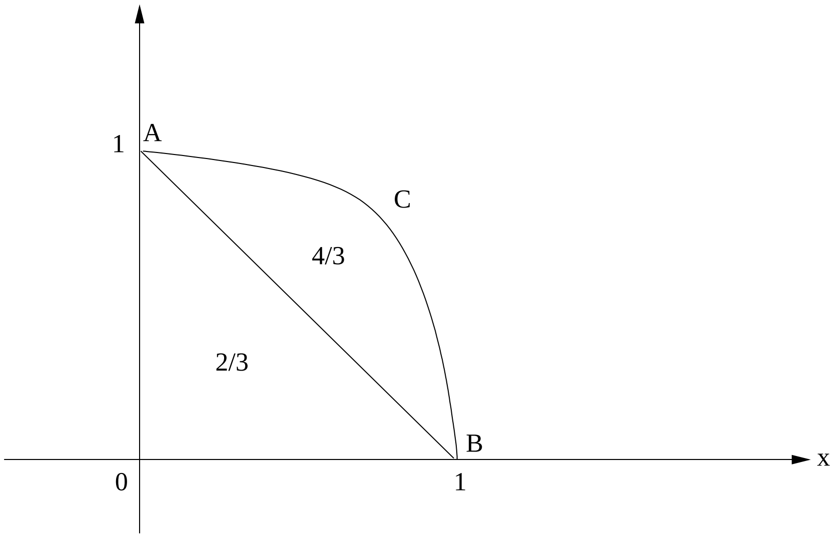
και η γραφική παράσταση της δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y δεδομένου του γεγονότος $X = 2/3$ φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της περιθωριακής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X του θέματος 1, ερώτημα (βii).



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. Y δεδομένου του γεγονότος $X = 2/3$ για το θέμα 1, υποερώτημα (βiii).



Σχήμα 5: Σχήμα θέματος 1, υποερώτημα (βiv).

(βiv) Για να υπολογίσουμε την πιθανότα $P(X^2+Y^2 \leq 1)$ αρκεί να δούμε ο σχήμα 5, οπότε:

$$\begin{aligned} P(X^2+Y^2 \leq 1) &= \text{εμβαδόν τριγώνου ΟΑΒ} \cdot \frac{2}{3} + \text{εμβαδόν τομέα ΑΒΓ} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{\pi - 1}{3} \end{aligned}$$

Θέμα 2

(α) Η τ.μ. $Z = X + 2Y$ είναι κανονική ως γραμμικός συνδυασμός κανονικών τ.μ. Επίσης $E[Z] = E[X] + 2E[Y] = 0$ και

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= var(X+2Y) = var(X) + var(2Y) + 2cov(X, 2Y) \\ &= \sigma_X^2 + 4\sigma_Y^2 + 4cov(X,Y) \\ &= 5 + 4 \cdot 2 + 4(-1) = 9 \end{aligned}$$

Άρα $Z \sim N(0,9)$

(β)

$$\begin{aligned} P(X+2Y \geq 1) &= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - P\left(\frac{Z-0}{3} \leq \frac{1-0}{3}\right) \\ &= 1 - \Phi(\frac{1}{3}) \end{aligned}$$

Θέμα 3

Κατ΄ αρχάς, όπως φαίνεται στο σχήμα, η τ.μ. Y παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 2r]$ (καθώς η θέση του X μετατοπίζεται από το r στο 0). Επομένως, για την αθροιστική συνάρτηση κατανομής ισχύει ότι $F_Y(y) = 0$ για $y < 0$ και $F_Y(y) = 1$ για $y > 2r$. Για $0 \leq y \leq 2r$ ισχύει ότι $x^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=r^2$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(2\sqrt{r^2-x^2}\le y)=p(x^2\ge r^2-\frac{y^2}{4})\\
&= P\left(X\ge\sqrt{r^2-\frac{y^2}{4}}\right)=\int_{\sqrt{r^2-\frac{y^2}{4}}}^{r}\frac{1}{r}dx\\
&= \frac{r-\sqrt{r^2-\frac{y^2}{4}}}{r}
\end{aligned}$$

Άρα:

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & , y<0\\ \frac{r-\sqrt{r^2-y^2/4}}{r} & , 0\le y\le 2r\\ 1 & , y\ge 2r\end{cases}$$

και

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\frac{y}{2r\sqrt{4r^2-y^2}} & , 0\le y\le 2r\\ 0 & , \text{αλλού}\end{cases}$$

Θέμα 4

(α) Η Z παίρνει μη αρνητικές τιμές, $z\ge 0$, και συνεπώς $F_Z(z)=0, z<0$. Για $z\ge 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z\le z)=P(\min(X_1,X_2)\le z)\\
&= 1-P(\min(X_1,X_2)>z)\\
&= 1-P(X_1>z\cap X_2>z)\\
&= 1-P(X_1>z)P(x_2>z)\\
&= 1-e^{-\lambda_1 z}\cdot e^{-\lambda_2 z}\\
&= 1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z} & , z\ge 0\\ 0 & , 0\end{cases}$$

(β) Η $R=\frac{X_1}{X_2}$ παίρνει μη αρνητικές τιμές. Άρα $F_R(r)=0$ για $r<0$. Για $r\ge 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
F_R(r) &= P(R\le r)=P(\frac{X_1}{X_2}\le r)=P(X_1\le rX_2)\\
&= \int\int_{\{u\le rv\}} f_{x_1x_2}(u,v)dudv\\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{rv}\lambda_1 e^{-\lambda_1 u}\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}dudv\\
&= \int_0^{+\infty}\left(-e^{-\lambda_1 u}\big|_0^{rv}\right)\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}dv\\
&= \int_0^{+\infty}\left(1-e^{-\lambda_1 rv}\right)\lambda_2 e^{-\lambda_2 v}dv\\
&= 1-\frac{\lambda_2}{r\lambda_1+\lambda_2}
\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$f_R(r) = \frac{d}{dr}F_R(r) = \begin{cases} \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 r+\lambda_2)^2} & , r \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$