

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες. Βασικές Έννοιες Συνεχών Τυχαίων Μεταβλητών.

(α) Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^x & \text{για } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (i) Δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της X και υπολογίστε τη σταθερά c .
- (ii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X > 3 \mid 2 \leq X \leq 6)$.
- (iii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(2 \leq X \leq 6 \mid X > 3)$.

(β) Οι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2/3 & \text{για } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ και } 0 \leq x+y \leq 1, \\ 4/3 & \text{για } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{ και } 1 < x+y \leq 2, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (i) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .
- (ii) Βρείτε την περιθωριακή σ.π.π. της τ.μ. X και δώστε την γραφική της παράσταση.
- (iii) Βρείτε την δεσμευμένη σ.π.π. της τ.μ. Y δεδομένου του γεγονότος $\{X = 2/3\}$ και δώστε την γραφική της παράσταση.
- (iv) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \leq 1)$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

Οι τ.μ. X και Y ακολουθούν από κοινού κανονική κατανομή με μέσες τιμές $\mu_X = \mu_Y = 0$ και διασπορές $\sigma_X^2 = 5$ και $\sigma_Y^2 = 2$, αντίστοιχα. Η συνδιασπορά των X και Y είναι $\text{cov}(X, Y) = -1$.

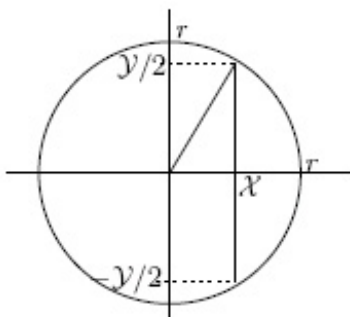
(α) Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. $Z = X + 2Y$; Ποια είναι η μέση τιμή και η διασπορά της Z ;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X + 2Y \geq 1\}$.

Εκφράστε την απάντησή σας στο (β) βάσει των τιμών $\Phi(x)$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής για θετικά ορίσματα, $x > 0$.

Θέμα 3 - 20 μονάδες. Γεωμετρικές Πιθανότητες.

Ως τυχαία χορδή ενός κύκλου ορίζεται εκείνη της οποίας το κέντρο X είναι τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, r]$, όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου. Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) και την σ.π.π. της τ.μ. Y , του μήκους της τυχαίας χορδής (βλ. Σχήμα).



Σχήμα 1: Τυχαία χορδή κύκλου.

Θέμα 4 - 30 μονάδες. Μετασχηματισμοί Ανεξάρτητων Εκθετικών Τυχαίων Μεταβλητών.

Έστω X_1 και X_2 ανεξάρτητες εκθετικά κατανομημένες τ.μ. με παραμέτρους λ_1 και λ_2 , αντίστοιχα.

(α) Υπολογίστε την α.σ.κ. και τη σ.π.π. της τ.μ. $Z = \min\{X_1, X_2\}$.

(β) Υπολογίστε την α.σ.κ. και τη σ.π.π. της τ.μ. $R = \frac{X_1}{X_2}$.