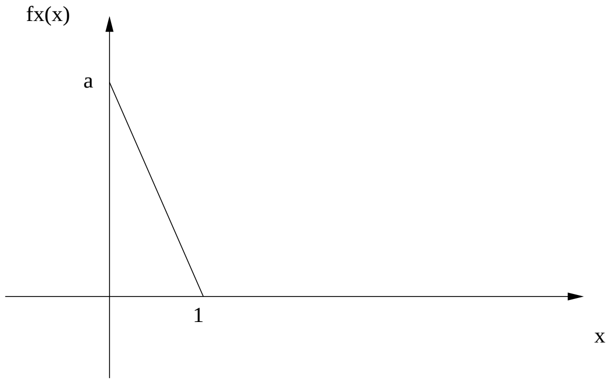
Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Λύσεις Τελικής Εξέτασης
Διδάσκων: Π.Τσακαλίδης
13 Ιουλίου 2007 - Διάρκεια: 3 Ώρες

Θέμα 1

(αi) Πρέπει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 a(1-x)dx = 1 \Rightarrow \left(ax - \frac{a}{2}x^2\right)|_0^1 = 1 \Rightarrow a - \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

Εναλλακτικά, πρέπει η επιφάνεια του τριγώνου με βάση 1 και ύψος a να είναι ίση με 1 $\frac{1}{2} \cdot a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 2$. Η γραφική παράσταση της σππ της X φαίνεται στο σχήμα 2.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της σππ για το θέμα 1, υποερώτημα (αi).

(αii)

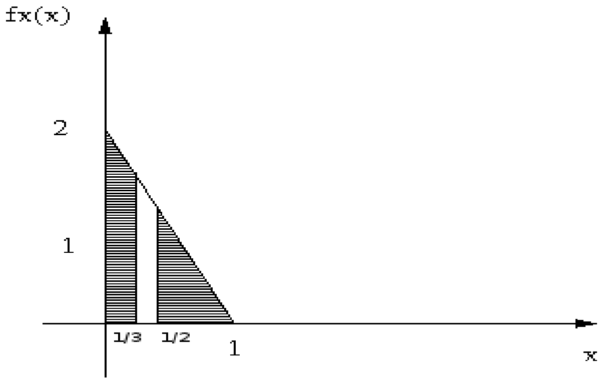
$$\begin{aligned}
P\left(6X^2 > 5X - 1\right) &= P\left(6X^2 - 5X - 1 > 0\right) \\
&= P((3X-1)(2X-1) > 0) \\
&= P\left(X > \frac{1}{3} \cap X > \frac{1}{2}\right) + P\left(X < \frac{1}{3} \cap X < \frac{1}{2}\right) \\
&= P\left(X > \frac{1}{2}\right) + P\left(X < \frac{1}{3}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2(1-x)dx = \frac{29}{36}
\end{aligned}$$

(αiii)

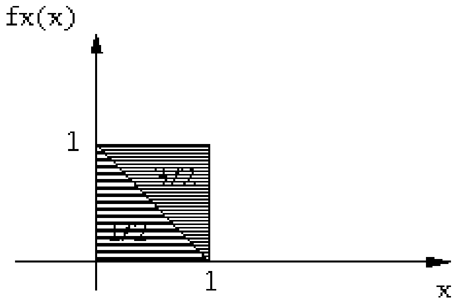
$$\begin{aligned}
F_X(x) &= 0 \text{ για } x < 0 \\
F_X(x) &= \int_0^x 2(1-t)dt = 2t - t^2 \,\Big|_0^x = 2x - x^2 \;\; \text{για } 0 \leq x \leq 1 \\
F_X(x) &= 1 \text{ για } x > 1
\end{aligned}$$

Τελικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2x - x^2 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της σππ για το θέμα 1, υποερώτημα (αii).



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της σππ για το θέμα 1, υποερώτημα (βi).

(βi) Η γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της απο κοινού σππ της X και Y φαίνεται στο σχήμα 3.

(βii)

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= 0 \text{ για } x < 0 \text{ ή } x > 1 \\
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x,y}(x,y)dy \\
&= \int_0^{1-x} \frac{1}{2}dy + \int_{1-x}^{1} \frac{3}{2}dy \\
&= \frac{1}{2}y|_0^{1-x} + \frac{3}{2}y|_{1-x}^{1} \\
&= \frac{1}{2}(1-x) + \frac{3}{2}(1-1+x) = \frac{1}{2} + x \text{ για } 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

Άρα

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/2 + x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

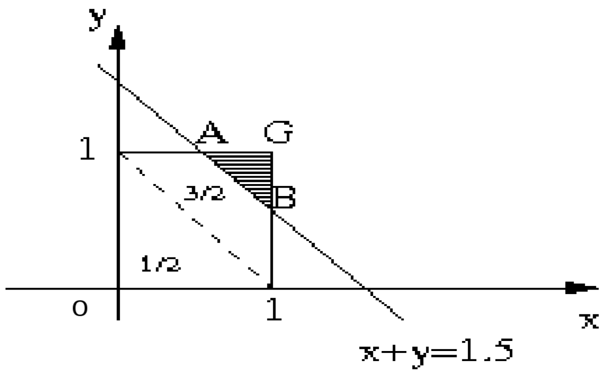
Ομοίως λόγω συμμετρίας:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 + y & , 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

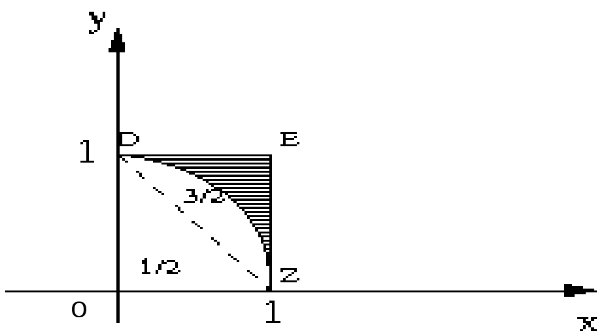
Προφανώς $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ και οι X, Y *δεν* είναι ανεξάρτητες.

(βiii)

$$\begin{aligned}
P(X + Y \leq 1.5) &= 1 - P(X + Y \geq 1.5) \\
&= 1 - \text{εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ} \cdot \frac{3}{2} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 0.5\right)\frac{3}{2} = \frac{13}{16}
\end{aligned}$$



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της σππ για το θέμα 1, υποερώτημα (βiii).



Σχήμα 5: Η γραφική παράσταση της σππ για το θέμα 1, υποερώτημα (βiv).

(βiv)

$$\begin{aligned} P(X^2+Y^2 \geq 1) &= \text{εμβαδόν τομέα ΔΕΖ} \cdot \frac{3}{2} \\ &= 1 - \text{εμβαδόν ΟΔΖ} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \left(1-\frac{\pi}{4}\right)\frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

Θέμα 2

(αi)

$$P(X<0) = P\left(\frac{X-(-10)}{2} < \frac{0-(-10)}{2}\right) = \Phi(5)$$

(αii)

$$\begin{aligned} P(-10<X<5) &= P\left(\frac{-10-(-10)}{2} < \frac{X-(-10)}{2} < \frac{5-(-10)}{2}\right) \\ &= \Phi(7.5) - \Phi(0) \\ &= \Phi(7.5) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(αiii)

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 5) &= P(X \geq 5) + P(X \leq -5) \\ &= 1 - P(X \leq 5) + P(X \leq -5) \\ &= 1 - P\left(\frac{X-(-10)}{2} \leq \frac{5-(-10)}{2}\right) + P\left(\frac{X-(-10)}{2} \leq \frac{-5-(-10)}{2}\right) \\ &= 1 - \Phi(7.5) + \Phi(2.5) \end{aligned}$$

(αiv)

$$\begin{aligned} P\left(X^2-3X+2>0\right) &= P((X-1)(X-2)>0) \\ &= P(X>1\cap X>2)+P(X<1\cap X<2) \\ &= P(X>2)+P(X<1) \\ &= P\left(\frac{X-(-10)}{2}>\frac{2-(-10)}{2}\right)+P\left(\frac{X-(-10)}{2}<\frac{1-(-10)}{2}\right) \\ &= 1-\Phi(6)+\Phi(5.5) \end{aligned}$$

(β) Ζητάμε την πιθανότητα:

$$\begin{aligned} P(|W-0.9|>0.005) &= P(W>0.905)+P(W<0.895) \\ &= 1-P\left(\frac{W-0.9}{0.003}<\frac{0.905-0.9}{0.003}\right)+P\left(\frac{W-0.9}{0.003}<\frac{0.895-0.9}{0.003}\right) \\ &= 1-\Phi\left(\frac{0.005}{0.003}\right)+\Phi\left(\frac{-0.005}{0.003}\right) \\ &= 1-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)+1-\Phi\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= 2\left(1-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right)\simeq 0.095=9.5 \end{aligned}$$

Θέμα 3

Έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} & var(2X+3Y+4)=var(3X-2Y+1) \\ \Rightarrow\ & var(2X+3Y)=var(3X-2Y) \\ \Rightarrow\ & var(2X)+var(3Y)+2cov(2X,3Y)=var(3X)+var(2Y)-2cov(3X,2Y) \\ \Rightarrow\ & 4\sigma^2+9\sigma^2+12cov(X,Y)=9\sigma^2+4\sigma^2-12cov(X,Y) \\ \Rightarrow\ & cov(X,Y)=0 \end{aligned}$$

(i) Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι X και Y είναι ασυσχέτιστες, άρα η πρόταση είναι αληθής.

(ii) Ψευδείς για γενική κατανομή των X,Y.

(iii)

$$\begin{aligned} var(2X+3Y+4) &= 4\sigma^2+9\sigma^2+0=13\sigma^2 \\ var(3X-2Y+1) &= 9\sigma^2+4\sigma^2+0=13\sigma^2 \end{aligned}$$

Άρα η πρόταση είναι αληθής.

(iv)

$$cov(X+Y,X-Y)=cov(X,X)-cov(X,Y)+cov(Y,X)-cov(Y,Y)=\sigma^2-0+0-\sigma^2=0$$

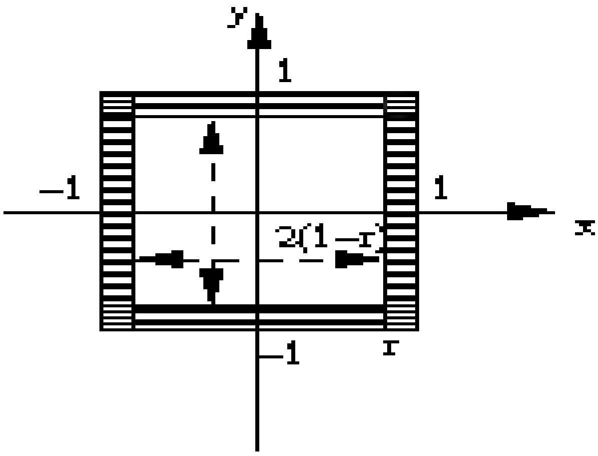
Άρα η πρόταση είναι αληθής.

Θέμα 4

(αi) Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4} & ,\ |x|\le 1 \text{ και } |y|\le 1 \\ 0 & ,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

Παρατηρώντας το σχήμα 6:



Σχήμα 6: Το σχήμα του θέματος 4.

- $Z = 2$ αν και μόνο αν το (X, Y) ανήκει σε ένα από τα 4 γωνιακά τετράγωνα πλευράς r.

$$P(Z = 2) = 4r^2 \frac{1}{4} = r^2$$

- $Z = 1$ αν και μόνο αν το (X, Y) ανήκει σε ένα από τα 4 παραλληλόγραμμα με πλευρές μήκους r και $2(1 - r)$

$$P(Z = 1) = 4r2(1 - r)\frac{1}{4} = 2r(1 - r)$$

- $Z = 0$ αν και μόνο αν το (X, Y) ανήκει στο κεντρικό τετράγωνο με μήκος πλευράς $2(1 - r)$

$$P(Z = 0) = (2(1 - r))^2 \frac{1}{4} = (1 - r)^2$$

Τελικά έχουμε ότι:

$$p_Z(z) = \begin{cases} (1-r)^2 & z = 0 \\ 2r(1-r) & z = 1 \\ r^2 & z = 2 \end{cases} \Rightarrow p_Z(z) = \binom{2}{z} r^z (1-r)^{2-z}, z = 0, 1, 2$$

Άρα είναι διωνυμικη με παραμέτρους $n = 2$ και $p = r$

(αii)

$$E(Z) = np = 2r = \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{4}$$

(βi) Εφόσον η τ.μ. X είναι εκθετικά κατανεμηνένη με παράμετρο λ έχουμε ότι

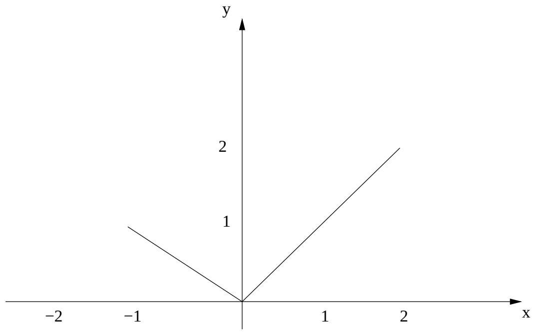
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

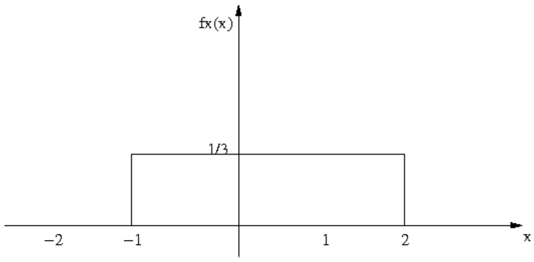
Η X παίρνει μη αρνητικές τιμές και επομένως σε αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός $Y = |X|$ είναι απλά $Y = X$.Άρα η Y είναι εκθετική όπως η X:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & , y \geq 0 \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases}$$

(βii)

- Για $y \leq 0$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$
- Για $y > 2$, $F_Y(y) = 1$
- Για $0 \leq y \leq 1$, $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y} \frac{1}{3} dx = \frac{2}{3} y$





Σχήμα 7: Σχήματα για το 4ο θέμα, ερώτημα βii

- Για $1 \leq y \leq 2$, $F_Y(y) = P(-1 \leq X \leq y) = \int_{-1}^{y} \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(y+1)$

Άρα :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{2}{3}y & 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{1}{3}(y+1) & 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & y \leq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & 0 < y \leq 1 \\ \frac{1}{3} & 1 < y \leq 2 \end{cases}$$