

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 30 μονάδες. Βασικές Έννοιες Συνεχών Τυχαίων Μεταβλητών.

(α) Η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_X(x) = \begin{cases} a(1-x) & \text{για } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (i) Δώστε τη γραφική παράσταση της σ.π.π. της X και υπολογίστε τη σταθερά a .
- (ii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(6X^2 > 5X - 1)$.
- (iii) Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της X .

(β) Οι δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.5 & \text{για } 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \text{ και } 0 \leq x+y < 1, \\ 1.5 & \text{για } 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \text{ και } 1 \leq x+y < 2, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (i) Δώστε τη γραφική παράσταση του πεδίου τιμών και της από κοινού σ.π.π. των τ.μ. X και Y .
- (ii) Βρείτε τις περιθωριακές σ.π.π. των X και Y . Είναι αυτές οι δύο τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους;
- (iii) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X+Y \leq 1.5)$.
- (iv) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(X^2 + Y^2 \geq 1)$.

Θέμα 2 - 20 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

(α) Η τ.μ. X ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή -10 και διασπορά 4 : $X \sim N(-10, 4)$. Υπολογίστε τις πιθανότητες των ακόλουθων γεγονότων

- (i) $P(X < 0)$ (ii) $P(-10 < X < 5)$ (iii) $P(|X| \geq 5)$ (iv) $P(X^2 - 3X + 2 > 0)$.

(β) Το πλάτος του μεταλλικού ίχνους σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα μοντελοποιείται ως μία κανονική τ.μ. W με μέση τιμή $\mu = 0.9$ μικρά και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.003$ μικρά: $W \sim N(0.9, 0.003^2)$. Κυκλώματα των οποίων το πλάτος του ίχνους δεν βρίσκεται εντός του εύρους τιμών 0.9 ± 0.005 μικρών θεωρούνται ελαττωματικά. Τι ποσοστό των κυκλωμάτων είναι ελαττωματικά;

Εκφράστε τις απαντήσεις σας βάσει των τιμών $\Phi(x)$ της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής της τυπικής Γκαουσιανής για θετικά ορίσματα, $x > 0$.

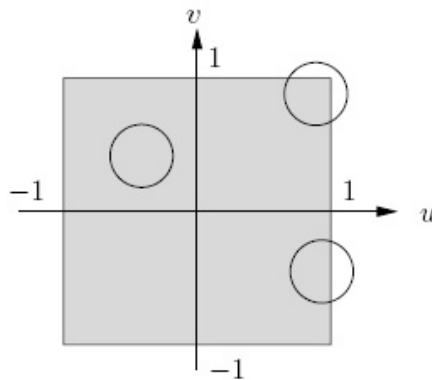
Θέμα 3 - 20 μονάδες. Διασπορές και Συνδιασπορές.

Έστω δύο τ.μ. X και Y που έχουν την ίδια διασπορά, $\text{var}(X) = \text{var}(Y) = \sigma^2$ και για τις οποίες ισχύει ότι $\text{var}(2X + 3Y + 4) = \text{var}(3X - 2Y + 1)$. Για κάθε μία από τις ακόλουθες 4 προτάσεις, απαντήστε αν ισχύει ή όχι. Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

- (i) Οι τ.μ. X και Y είναι ασυσχέτιστες.
- (ii) Οι τ.μ. X και Y είναι ανεξάρτητες.
- (iii) $\text{var}(2X + 3Y + 4) = \text{var}(2X - 3Y + 1)$.
- (iv) $\text{cov}(X + Y, X - Y) = 0$.

Θέμα 4 - 30 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

(α) Ένα τυχαίο σημείο (X, Y) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο εσωτερικό ενός τετραγώνου το οποίο έχει μήκος πλευράς ίσο με 2 και κέντρο την αρχή των αξόνων. Έστω ένας κύκλος με ακτίνα $r < 1$ και κέντρο το σημείο (X, Y) και έστω $Z \in \{0, 1, 2\}$ η τ.μ. που συμβολίζει τον αριθμό των πλευρών του τετραγώνου που τέμνει ο κύκλος, όπως φαίνεται στο σχήμα.



- (i) Υπολογίστε τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. Z . Αναγνωρίζετε την κατανομή της Z ;
- (ii) Αν $E[Z] = \frac{3}{2}$, ποια είναι η τιμή της σταθεράς r ;

(β) Έστω η συνεχής τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x)$. Υπολογίστε τη σ.π.π. της τ.μ. $Y = |X|$ στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις.

- (i) Η τ.μ. X είναι εκθετικά κατανεμημένη με παράμετρο λ .
- (ii) Η τ.μ. X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[-1, 2]$.