ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

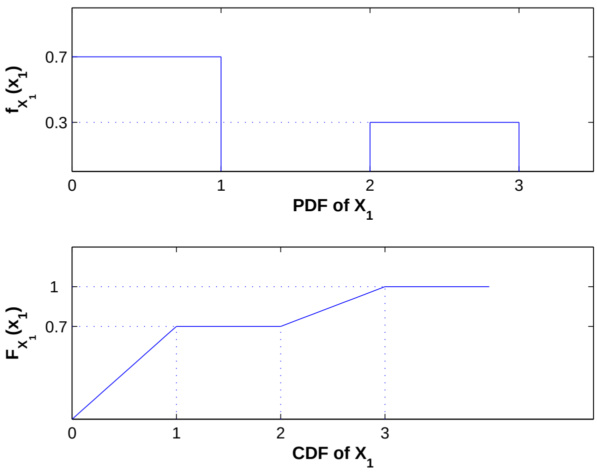
Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 07/12/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 20/12/2006

Άσκηση 1.
(α) Η X_n είναι μια τμηματικά ομοιόμορφη συνεχής τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών $[0,\ 1/n) \cup [2,\ 2+1/n)$. Η Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής (CDF) της X_n ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x_n) &= P(X_n \le x_n) \\ &= \begin{cases} 0, & x_n \le 0 \\ 0.7 n x_n, & 0 \le x_n \le 1/n \\ 0.7, & 1/n \le x_n \le 2 \\ 0.7 + 0.3n(x_n - 2), & 2 \le x_n \le 2 + 1/n \\ 1, & 2 + 1/n \le x_n \end{cases} \end{aligned}$$

Για $n = 1$, οι γραφικές παραστάσεις της Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας (PDF) και της CDF για τη X_1 φαίνονται στο Σχ. 1.

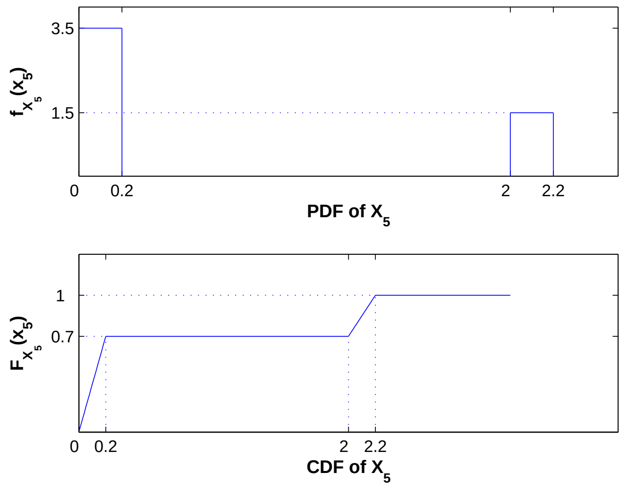


Σχήμα 1:

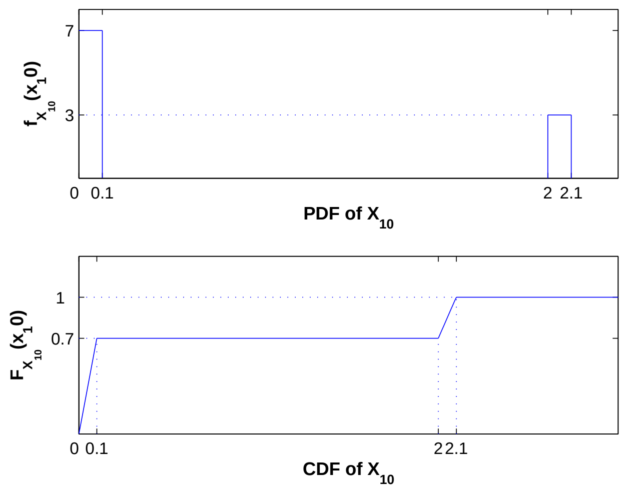
Για $n = 5$, οι γραφικές παραστάσεις της PDF και της CDF για τη X_5 φαίνονται στο Σχ. 2.
Για $n = 10$, οι γραφικές παραστάσεις της PDF και της CDF για τη X_{10} φαίνονται στο Σχ. 3.
(β) Η CDF της Y ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0.7, & 0 \le y < 2 \\ 1, & y \ge 2 \end{cases} \end{aligned}$$

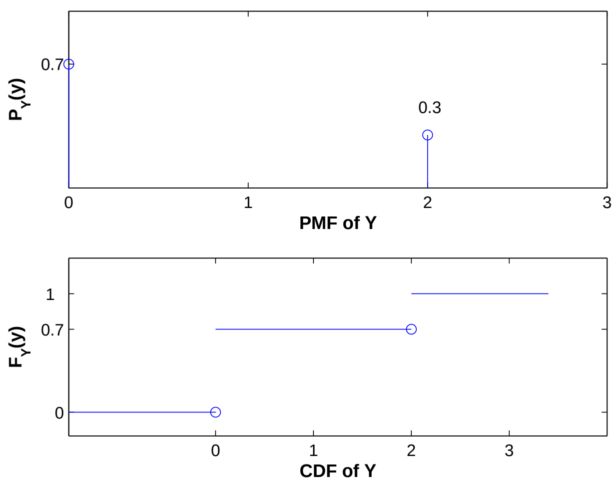
Η Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας PMF και η CDF της Y φαίνονται στο Σχ. 4.



Σχήμα 2:



Σχήμα 3:



Σχήμα 4:

Άσκηση 2.

(α) Ένα σφάλμα συμβαίνει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν το σύστημα συμπεραίνει ότι εστάλη 0 ή 1, όταν στην πραγματικότητα εστάλη το -1.
- Αν το σύστημα συμπεραίνει ότι εστάλη -1 ή 1, όταν στην πραγματικότητα εστάλη το 0.
- Αν το σύστημα συμπεραίνει ότι εστάλη -1 ή 0, όταν στην πραγματικότητα εστάλη το 1.

Επομένως, η πιθανότητα σφάλματος, $P(e)$, δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X=-1)P(Y \geq -\frac{1}{2}|X=-1) + P(X=0)P(Y < -\frac{1}{2} \text{ ή } Y > \frac{1}{2}|X=0) \\ &\quad + P(X=1)P(Y \leq \frac{1}{2}|X=1) \\ &= \frac{1}{3}P(N \geq \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N < -\frac{1}{2} \text{ ή } N > \frac{1}{2}) + \frac{1}{3}P(N \leq -\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

λόγω της συμμετρίας της Κανονικής κατανομής

$$P(N \geq \frac{1}{2}) = P(N \leq -\frac{1}{2})$$

Καθώς η N είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να υπολογίσουμε την $P(N \geq n)$ χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Φ,

$$P(N \geq n) = \Big(1 - \Phi\Big(\frac{n-\mu}{\sigma}\Big)\Big)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{4}{3}P(N \geq \frac{1}{2}) \\ &= \frac{4}{3}\Big(1 - \Phi\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\Big)\Big) \\ &= 0.535 \end{aligned}$$

(β) Ομοίως,

$$\begin{aligned} P(e) &= P(X=-2)P(Y \geq -1|X=-2) + P(X=0)P(Y < -1 \text{ ή } Y > 1|X=0) \\ &\quad + P(X=2)P(Y \leq 1|X=2) \\ &= \frac{1}{3}P(N \geq 1) + \frac{1}{3}P(N < -1 \text{ ή } N > 1) + \frac{1}{3}P(N \leq -1) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} P(e) &= \frac{4}{3}P(N \geq 1) \\ &= \frac{4}{3}\Big(1 - \Phi\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big) \\ &= 0.41 \end{aligned}$$

Άσκηση 3. Είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την $P(X > Y)$ παίρνοντας δεσμευμένη πιθανότητα πάνω στη μεταβλητή Y και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας:

$$\begin{aligned} P(X > Y) &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X > Y | Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X > y | Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} P(X > y) P(Y = y) \\ &= \sum_{y=0}^{\infty} e^{-\lambda y} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-\lambda})^y}{y!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{-\lambda}} = e^{\lambda(e^{-\lambda}-1)} \end{aligned}$$

Άσκηση 4.
(α) Έστω G το γεγονός 'ο καιρός είναι καλόσ'. Δίνεται ότι $P(G) = \frac{2}{3}$. Για να βρούμε την PDF της X, πρώτα βρίσκουμε την PDF της W, καθώς $X = s + W = 2 + W$. Ξέρουμε ότι αν ο καιρός είναι καλός, τότε $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ενώ αν ο καιρός είναι κακός $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$. Για να βρούμε την PDF της W χρησιμοποιούμε το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας για συναρτήσεις πυκνότητας:

$$\begin{aligned} f_W(w) &= P(G) \cdot f_{W|G}(w) + P(G^c) \cdot f_{W|G^c}(w) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2\cdot 9}} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πραγματοποιούμε την αλλαγή μεταβλητών $X = 2 + W$ για να βρούμε την PDF της X:

$$f_X(x) = f_W(x-2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 9}} \ .$$

(β) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την PDF που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα για να υπολογίσουμε τη ζητούμενη πιθανότητα

$$\int_1^3 f_X(x)\, dx \ .$$

Είναι όμως ευκολότερο να μεταφράσουμε το γεγονός $\{1 \leq X \leq 3\}$ χρησιμοποιώντας το W και μετά να εφαρμόσουμε το θεώρημα Ολικής Πιθανότητας. Έχουμε ότι

$$P(1 \leq X \leq 3) = P(1 \leq 2 + W \leq 3) = P(-1 \leq W \leq 1)$$

και από το θ. Ολ. Πιθ.

$$P(-1 \leq W \leq 1) = P(G) \underbrace{P(-1 \leq W \leq 1 | G)}_{a} + P(G^c) \underbrace{P(-1 \leq W \leq 1 | G^c)}_{b}$$

Καθώς δεσμεύοντας είτε πάνω στη G ή στη G^c η τυχαία μεταβλητή W είναι Gaussian, οι δεσμευμένες πιθανότητες a και b μπορούν να εκφραστούν μέσω της συνάρτησης Φ. Δεσμεύοντας πάνω στη G έχουμε $W \sim \mathcal{N}(0, 1)$ οπότε

$$a = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \ .$$

Δεσμεύοντας πάνω στη G^c έχουμε $W \sim \mathcal{N}(0, 9)$ οπότε

$$b = \Phi\Big(\frac{1}{3}\Big) - \Phi\Big(-\frac{1}{3}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{1}{3}\Big) - 1 \ .$$

Επομένως η τελική απάντηση είναι η:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \frac{2}{3}(2\Phi(1) - 1) + \frac{1}{3}\Big(2\Phi\Big(\frac{1}{3}\Big) - 1\Big) \ .$$

Άσκηση 5.
Ισχύει ότι,

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) = \begin{cases} 3\alpha^3 x^{-4}, & x \geq \alpha \\ 0, & x < \alpha \end{cases}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx &= \int_{\alpha}^{+\infty} x\, 3\,\alpha^3 x^{-4}\, dx \\ &= 3\,\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-3}\, dx \\ &= 3\,\alpha^3 \Big(-\frac{1}{2}\, x^{-2}\Big)\Big|_{\alpha}^{+\infty} \\ &= \frac{3\alpha}{2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx &= \int_{\alpha}^{+\infty} x^2\, 3\,\alpha^3 x^{-4}\, dx \\ &= 3\,\alpha^3 \int_{\alpha}^{+\infty} x^{-2}\, dx \\ &= 3\,\alpha^3 (-\,x^{-1})\Big|_{\alpha}^{+\infty} \\ &= 3\alpha^2 \end{aligned}$$

Άρα, η διασπορά είναι,

$$var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 3\alpha^2 - \Big(\frac{3\alpha}{2}\Big)^2 = \frac{3\alpha^2}{4}$$