

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τέταρτη Σειρά Ασκήσεων - Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 7/12/2006

Ημερομηνία Παράδοσης: 20/12/2006

Άσκηση 1. (α) Έστω η συνεχής τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X_n με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f(x_n) = \begin{cases} 0.7n, & 0 \leq x_n < 1/n \\ 0.3n, & 2 \leq x_n < 2 + 1/n. \end{cases}$$

Υπολογίστε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) και δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π.π. και της α.σ.κ. της X_n για $n = 1, 5, 10$.

(β) Έστω η διακριτή τ.μ. Y με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.)

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.7, & y = 0 \\ 0.3, & y = 2. \end{cases}$$

Υπολογίστε την α.σ.κ. και δώστε τις γραφικές παραστάσεις της σ.π. και της α.σ.κ. της Y .

Άσκηση 2. Ανίχνευση σήματος: Ένα τηλεπικοινωνιακό σύστημα κωδικοποιεί τα μηνύματα χρησιμοποιώντας τρία ισοπίθανα σύμβολα με τιμές -1, 0 και 1, τα οποία στέλνει μέσω ενθόρυβου Γκαουσιανού καναλιού. Δηλαδή, όταν ο πομπός στέλνει την τιμή X , ο δέκτης λαμβάνει την τιμή $Y = X + N$, όπου η τ.μ. N είναι Γκαουσιανή με μέση τιμή μηδέν και διασπορά $\sigma^2 = 4$, $N \sim N(0, 4)$.

(α) Προφανώς, σύμφωνα με το παραπάνω σύστημα, η τ.μ. X είναι διακριτή με ομοιόμορφη κατανομή και τιμές -1, 0 και 1. Έστω ότι ο δέκτης αποφασίζει για το σύμβολο που εστάλη χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα

- Αν $Y > \frac{1}{2}$, τότε αποφάσισε ότι εστάλη η τιμή 1.
- Αν $Y < -\frac{1}{2}$, τότε αποφάσισε ότι εστάλη η τιμή -1.
- Αν $-\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{1}{2}$, τότε αποφάσισε ότι εστάλη η τιμή 0.

Υπολογίστε την πιθανότητα σφάλματος για αυτό το τηλεπικοινωνιακό σύστημα.

(β) Σε μία προσπάθεια να μειωθεί η πιθανότητα σφάλματος, γίνεται η ακόλουθη τροποποίηση στο σύστημα. Ο πομπός κωδικοποιεί τα μηνύματα τις τιμές -2, 0 και 2, ενώ ο δέκτης αποφασίζει χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο κανόνα

- Αν $Y > 1$, τότε αποφάσισε ότι εστάλη η τιμή 2.
- Αν $Y < -1$, τότε αποφάσισε ότι εστάλη η τιμή -2.
- Αν $-1 \leq Y \leq 1$, τότε αποφάσισε ότι εστάλη η τιμή 0.

Υπολογίστε την πιθανότητα σφάλματος σε αυτή την περίπτωση και συγκρίνετε με την περίπτωση (α). Με ποιο αντίτιμο έρχεται η καλύτερη απόδοση στο σύστημα (β);

Άσκηση 3. Ο Γιάννης και ο Μάρκος παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Ο Γιάννης διαλέγει τυχαία έναν αριθμό X από μία γεννήτρια που παράγει δείγματα μιας τ.μ. που ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ . Συγχρόνως, ο Μάρκος διαλέγει τυχαία έναν αριθμό Y από μία γεννήτρια που παράγει δείγματα μιας Poisson τ.μ. με παράμετρο επίσης λ . Αν ο αριθμός του Γιάννη είναι μεγαλύτερος από αυτόν του Μάρκου, τότε συνεχίζουν το παιχνίδι διαλέγοντας δύο νέους αριθμούς. Αλλιώς, το παιχνίδι τελειώνει. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι το παιχνίδι θα κρατήσει πάνω από ένα γύρο.

Βοήθεια: Για να υπολογίσετε την ζητούμενη πιθανότητα, χρησιμοποιείτε το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνοντας ως διαμέριση του δειγματοχώρου τα γεγονότα $\{Y = y\}$.

Άσκηση 4. Το σήμα $s = 2$ μεταδίδεται από ένα δορυφόρο αλλά λόγω της επίδρασης του θορύβου το λαμβανόμενο σήμα έχει τη μορφή $X = s + W$. Όταν ο καιρός είναι καλός, γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα $2/3$, η συνιστώσα του θορύβου, W , ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1 , $W \sim N(0, 1)$. Όταν ο καιρός είναι κακός, η συνιστώσα του θορύβου, W , ακολουθεί κανονική κατανομή με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 9 , $W \sim N(0, 9)$. Υπολογίστε τη σ.π.π. της τ.μ. X και την πιθανότητα η X να πάρει τιμές μεταξύ 1 και 3 .

Βοήθεια: Χρησιμοποιείτε το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνοντας ως διαμέριση του δειγματοχώρου τις καιρικές συνθήκες και εκφράστε την ζητούμενη πιθανότητα $P(1 \leq X \leq 3)$ συναρτήσει των τιμών $\Phi(1)$ και $\Phi(1/3)$ της α.σ.κ. της τυπικής κανονικής κατανομής.

Άσκηση 5. Υπολογίστε τη σ.π.π., την μέση τιμή και τη διασπορά της τ.μ. X με α.σ.κ.

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{a^3}{x^3}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

όπου a είναι μία θετική σταθερά.