ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Τρίτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/11/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 22/11/2006

Άσκηση 1.

(α) Η τυχαία μεταβλητή W λαμβάνει τιμές $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Η συνάρτηση πιθανότητας είναι,

$$p_W(w) = P\{W = w\} = P\Big\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = w\Big\} \quad = \quad \binom{8}{k} \cdot \frac{1}{2^8},$$

εφόσον υπάρχουυν $\binom{8}{w}$ 8 διαστάσεων διανύσματα που έχουν άσσους, για $w \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Παρατηρείστε ότι,

$$\sum_{w=0}^{8} p_W(w) = \sum_{w=0}^{8} \binom{8}{w} \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^8} \sum_{w=0}^{8} \binom{8}{w} = \frac{1}{2^8} \cdot (1+1)^8 = 1,$$

όπως περιμέναμε, αφού p_W είναι μια συνάρτηση πιθανότητας.
Υποσημείωση: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

(β) Ισχύει:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{άρτιος αριθμός άσσων} \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} p_X(1) = P\{X = 1\} = P\Big\{\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = 2k = \text{'αρτιος'}\}\Big\} = \\ = P\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = 0\} + P\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = 2\} + \\ + P\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = 4\} + P\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = 6\} + P\{w : \sum_{i=0}^{7} w_i = 8\} = \\ = p_W(0) + p_W(2) + p_W(4) + p_W(6) + p_W(8) = \\ = \frac{1}{2^8} \cdot \Big(\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8}\Big) = \\ = \frac{1}{2^8} \cdot \Big(1 + \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7}{2} + 1\Big) = \\ = \frac{1}{2^8} \cdot (2 + 56 + 70) = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Επομένως αφού $p_X(0) + p_X(1) = 1 \Rightarrow \ p_X(0) = \frac{1}{2}$.
Άρα,

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

(γ) Ισχύει το εξής:

$$Y = \begin{cases} 1, & w_j = 1 \\ 0, & w_j = 0. \end{cases}$$

Επομένως,

$$p_Y(1) = P\{Y = 1\} = P\{w : w_j = 1\}.$$

Η πιθανότητα $p_Y(1)$ αντιστοιχεί στο γεγονός όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες $w_i,\ i \neq j$ λαμβάνουν τιμή 0 ή 1. Δηλαδή, το πλήθος των αποτελεσμάτων να είναι $w_j = 1$ και $w_i = 0$ ή 1 για $i \neq j$ ισούται με το άθροισμα:

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + ... + \binom{7}{7} = \sum_{n=0}^{7} \binom{7}{n} = (1+1)^7 = 2^7,$$

αφού μπορεί να είναι 0 ή 1 ή 2 ή ...7 δυνατές συνιστώσες $w_i = 1$. Κάθε ένα από τα 2^7 αποτελέσματα έχουν πιθανότητα $1/2^8$, επομένως,

$$p_Y(1) = P\{Y = 1\} = P\{w : w_j = 1\} = \frac{2^7}{2^8} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως αφού $p_Y(0) + p_Y(1) = 1 \Rightarrow\ p_Y(1) = \frac{1}{2}$.
Άρα,

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & y = 1 \\ \frac{1}{2}, & y = 0. \end{cases}$$

(δ) Ισχύει το εξής:

$$Z = \begin{cases} 1, & \max_i(w_i) = 1 \\ 0, & \max_i(w_i) = 0. \end{cases}$$

Άρα,

$$p_Z(0) = P\{Z = 0\} = P\{w : \max_i(w_i) = 0\} = P\{0,0,0,0,0,0,0,0\} = \frac{1}{2^8}.$$

Όμοια $p_Z(0) + p_Z(1) = 1$, άρα,

$$p_Z(1) = P\{Z = 1\} = 1 - \frac{1}{2^8} = \frac{255}{256},$$

και

$$p_Z(z) = \begin{cases} \frac{255}{256}, & z = 1 \\ \frac{1}{256}, & z = 0. \end{cases}$$

Άσκηση 2.

(α) Το άθροισμα της συνάρτησης πιθανότητας όλων των πιθανών τιμών ισούται με 1. Επομένως,

$$1 = \sum_{x=-3}^{3} p_X(x) = \frac{9}{a} + \frac{4}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{4}{a} + \frac{9}{a} = \frac{28}{a},$$

Άρα $a = 28$. Η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X είναι:

$$E[X] = \sum_x x p_X(x) = \sum_{x=-3}^{3} x \cdot \frac{x^2}{a} = -3 \cdot \frac{9}{a} - 2 \cdot \frac{4}{a} - 1 \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{4}{a} + 3 \cdot \frac{9}{a} = 0.$$

Παρατηρείστε ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής ισούται πάντα με 0 εάν η σσυνάρτηση πιθανότητας είναι μια άρτια συνάρτηση, δηλαδή αν $p_X(x) = p_X(-x)\ \forall x$.

(β) Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του Z για ένα δεδομένο X, και την πιθανότητα του γεγονότος αυτού.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p_X(x)$	9/28	1/7	1/28	0	1/28	1/7	9/28
$Z\|X=x$	9	4	1	0	1	4	9

Παρατηρούμε ότι το Z μπορεί να πάρει μόνο τρεις τιμές με πιθανότητα μη μηδενική (1,4,9). Επιπλέον, κάθε τέτοια τιμή αντιστοιχεί σε δύο τιμές του X. Άρα έχουμε για παράδειγμα, $p_Z(9) = P(Z=9) = P(Z=-3) + P(Z=3) = p_X(-3) + p_X(3)$. Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι,

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/14 & z=1, \\ 2/7 & z=4, \\ 9/14 & z=9, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(γ) Ισχύει ότι: $var(X) = E[(X-E[X])^2] \Rightarrow\ var(X) = E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{14} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 9 \cdot \frac{9}{14} = 7.$

Άσκηση 3.

(α) Η συνάρτηση πιθανότητας της X_n είναι:

$$p_{X_n}(k) = \begin{cases} 2^{-n} & k = 2^n, \\ 1-2^{-n} & k=0. \end{cases}$$

(β) Η μέση τιμή είναι: $E[X_n] = 2^{-n} \cdot 2^n = 1$.

(γ) Η διασπορά είναι:
$var(X_n) = E[(X_n - E[X_n])^2] = E[(X_n-1)^2] = 2^{-n} \cdot (2^n-1)^2 + (1-2^{-n}) \cdot (0-1)^2 = 2^n - 1.$

(δ) $i)$Η πιθανότητα να φαλιρήσει μετά από n ρίψεις είναι $(1-2^{-n})$ που τείνει στο 1 όταν $n \to \infty$.
$ii)E[X_n] = 1$, άρα τείνει στο 1 καθώς $n \to \infty$. Επομένως μπορεί κανείς να συμπεράνει από (i, ii) ότι ο παίκτης τελικά θα φαλιρήσει.
$iii)$ $var(X_n) = 2^n - 1$ που τείνει στο άπειρο όταν $n \to \infty$.

Παρατηρήσεις: Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι τέτοιοι ώστε αν αποφασίσει κάποιος να παίξει, πρέπει να παίζει για πάντα. Ο μόνος τρόπος για να μην φαλιρήσει είναι κάθε ρίψη να φέρει κεφαλή. Το γεγονός όμως αυτό είναι μηδενικής πιθανότητας, δηλαδή με πιθανότητα 1 ο παίκτης θα φαλιρήσει. Άρα είναι προτιμότερο να μην παίξει. Υπάρχει μόνο μια μικρή πιθανότητα να κερδίσει ένα μεγάλο ποσό πριν φαλιρήσει.

Ακόμα, αν ο παίκτης έχει την δυνατότητα να σταματήσει ύστερα από ένα πεπερασμένο αριθμό παιχνιδιών, και ο αριθμός αυτός είναι πολύ μεγάλος, τότε πάλι η πιθανότητα να κερδίσει μεγάλη περιουσία είναι πολύ μικρή. Ενώ η πιθανότητα να φαλιρήσει είναι μεγάλη. Εξαρτάται επομένως από το πόσο είναι διατεθιμένος ο παίκτης να ρισκάρει. Για παράδειγμα, αν ξεκινήσει το παιχνίδι με ένα ευρώ, και θέλει απεγνωσμένα να κερδίσει ένα μεγάλο ποσό, τότε είναι προτιμότερο να παίξει.

Το νόημα εδώ είναι να δει κανείς ότι η μέση τιμή δεν δείχνει πάντα τι είναι πιο πιθανό να γίνει. Για παράδειγμα, η μέση τιμή είναι πάντα 1, αλλά παρόλα αυτά ύστερα από πολλά παιχνίδια ο παίκτης θα έχει φαλιρήσει. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι υπάρχει μόνο ένα πολύ σπάνιο ενδεχόμενο η τυχαία μεταβλητή να παρεί μεγάλη τιμή.

Άσκηση 4. Έστω $A = \{X > k\}$. Τότε,

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^{n+k} = p(1-p)^k \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n = (1-p)^k.$$

Εάν $x \leq k$ τότε $p_X(x|A) = 0$, ενώ αν $x > k$ τότε,

$$p_X(x|A) = P\{X = x|X > k\} = \frac{P\{X = x\}}{P\{X > k\}} = \frac{p(1-p)^{x-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{(x-k-1)}.$$

Αυτό δείχνει ότι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή δεν έχει μνήμη, αφού $p_X(x|X > k) = p_X(x-k)$.

Άσκηση 5.

(α) Ορίζουμε τις 2 διαδοχικές ρίψεις με W, Z αντίστοιχα. Τα 16 ισοπίθανα ζεύγη φαίνονται στον παρακάτω πίνακα (κάθε κελί περιέχει το ζεύγος (X, Y)).

	Z=1	Z=2	Z=3	Z=4
$W = 1$	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
$W = 2$	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
$W = 3$	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,3)
$W = 4$	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Από τον πίνακα μπορούμε να βρούμε τις συναρτήσεις πιθανότητας για τα X, Y.

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{16}, & k = 0 \\ \frac{3}{16}, & k = 1 \\ \frac{5}{16}, & k = 2 \\ \frac{7}{16}, & k = 3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} \frac{7}{16}, & k = 1 \\ \frac{5}{16}, & k = 2 \\ \frac{3}{16}, & k = 3 \\ \frac{1}{16}, & k = 4 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις μέσες τιμές αντίστοιχα,

$$E[X] = \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{3}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{7}{16} \cdot 3 = \frac{17}{8},$$

$$E[Y] = \frac{7}{16} \cdot 1 + \frac{5}{16} \cdot 2 + \frac{3}{16} \cdot 3 + \frac{1}{16} \cdot 4 = \frac{15}{8}.$$

Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι:

$$E[X - Y] = E[X] - E[Y] = \frac{1}{4}.$$

(β) Από τις συναρτήσεις πιθανότητας στο (α) μπορούμε να υπολογίσουμε τα εξής:

$$E[X^2] = \frac{1}{16} \cdot 0^2 + \frac{3}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{7}{16} \cdot 3^2 = \frac{43}{8},$$

$$E[Y^2] = \frac{7}{16} \cdot 1^2 + \frac{5}{16} \cdot 2^2 + \frac{3}{16} \cdot 3^2 + \frac{1}{16} \cdot 4^2 = \frac{35}{8}.$$

Άρα, $var(X) = E[X^2] - \Big(E[X]\Big)^2 = \frac{55}{64}$ και $var(Y) = E[Y^2] - \Big(E[Y]\Big)^2 = \frac{55}{64}$.

Αφού οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες, οι διασπορά των X και Y δεν είναι κάποιος απλός συνδιασμός των παραπάνω. Μάλιστα, αν $Z = X - Y$ τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Z είναι:

$$p_Z(k) = \begin{cases} \frac{4}{16}, & k = -1 \\ \frac{6}{16}, & k = 0 \\ \frac{4}{16}, & k = 1 \\ \frac{2}{16}, & k = 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Επομένως $E[Z^2] = \frac{4}{16} \cdot (-1)^2 + \frac{6}{16} \cdot 0^2 + \frac{4}{16} \cdot 1^2 + \frac{2}{16} \cdot 2^2 = 1$, και $var(Z) = E[Z^2] - \Big(E[Z]\Big)^2 = 1 - (\frac{1}{4})^2 = \frac{15}{16}$.

Άσκηση 6.

(α) Έστω L_i το γεγονός ο Χρήστος να παίξει λόττο την *ιοστή* εβδομάδα, και W_i το γεγονός να κερδίσει την *ιοστή* εβδομάδα. Πρέπει να υπολογίσουμε την παρακάτω πιθανότητα,

$$P(L_i|W_i^c) = \frac{P(W_i^c|L_i)P(L_i)}{P(W_i^c|L_i)P(L_i) + P(W_i^c|L_i^c)P(L_i^c)} = \frac{(1-q)p}{(1-q)p + 1(1-p)} = \frac{p - pq}{1 - pq}.$$

(β) Δεδομένου του X η τυχαία μεταβλητή Y είναι διωνυμική, επομένως:

$$p_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{(x-y)}, & 0 \le y \le x \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(γ) Αφού η X ακολουθεί διωνυμική κατανομή τότε,

$$p_{X,Y}(x,y) = p_{Y|X}(y|x) p_X(x) = \begin{cases} \binom{x}{y} q^y (1-q)^{(x-y)} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}, & 0 \le y \le x \le n \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(δ) Από το παραπάνω ερώτημα μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $p_Y(y) = \sum_{x=y}^{n} p_{X,Y}(x,y)$. Είναι όμως πιο εύκολο να υπολογίσουμε την πιθανότητα αυτή, αν παρατηρήσουμε ότι η Y είναι το άθροισμα από n ανεξάρτητες Bernoulli, με πιθανότητα pq να είναι 1. Άρα η Y έχει διωνυμική συνάρτηση πιθανότητας:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \binom{n}{y} (pq)^y (1-pq)^{(n-y)}, & 0 \le y \le n \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

(ε)

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\binom{x}{y} q^y (1-q)^{(x-y)} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}}{\binom{n}{y} (pq)^y (1-pq)^{(n-y)}}, & 0 \le y \le x \le n \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$