

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Τρίτη Σειρά Ασκήσεων - Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ημερομηνία Ανάθεσης: 13/11/2006

Ημερομηνία Παράδοσης: 22/11/2006

Άσκηση 1. Ο δειγματοχώρος Ω ενός πειράματος τύχης αποτελείται από όλα τα δυνατά διανύσματα 8 διαστάσεων της μορφής $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_7)$, όπου το ω_i παίρνει τιμές 0 ή 1. Ο πιθανοτικός νόμος εκχωρεί πιθανότητα $1/2^8$ σε κάθε ένα από τα 2^8 στοιχεία του δειγματοχώρου Ω . Βρείτε το πεδίο τιμών και τη συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.) για κάθε μία από τις παρακάτω διακριτές τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.):

- (α) $W(\omega) = \sum_{i=0}^7 \omega_i$, δηλαδή το πλήθος των 1 στο δυαδικό διάνυσμα.
- (β) $X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν υπάρχει άρτιος αριθμός από 1 στο } \omega, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$
- (γ) $Y(\omega) = \omega_j$, δηλαδή η τιμή της j -στής συνιστώσας του ω .
- (δ) $Z(\omega) = \max_i(\omega_i)$, δηλαδή η μέγιστη συνιστώσα του ω .

Άσκηση 2. Θεωρείστε την διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πιθανότητας (σ.π.):

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a} & \text{αν } x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

- (α) Υπολογίστε τη σταθερά a και τη μέση τιμή $E[X]$.
- (β) Υπολογίστε τη σ.π. της τ.μ. $Z = (X - E[X])^2$.
- (γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (β), υπολογίστε τη διασπορά της τ.μ. X .

Άσκηση 3. Θεωρείστε το ακόλουθο παιχνίδι που προκύπτει από την ακολουθία ανεξάρτητων ρίψεων ενός δίκαιου κέρματος. Αρχίζετε το παιχνίδι με ένα ευρώ και ποντάρετε όλα τα λεφτά σας (αν σας έχουν μείνει) σε κάθε νέα ρίψη του κέρματος. Αν έρθει κεφαλή, διπλασιάζετε τα λεφτά σας, αλλιώς αν έρθουν γράμματα τα χάνετε όλα. Έστω η τ.μ. X_n που αντιπροσωπεύει το συνολικό κεφάλαιό σας μετά από n ρίψεις του κέρματος.

- (α) Υπολογίστε το πεδίο τιμών και τη συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X .
- (β) Υπολογίστε τη μέση τιμή $E[X_n]$, δηλαδή το αναμενόμενο κεφάλαιό σας μετά από n ρίψεις του κέρματος.
- (γ) Υπολογίστε τη διασπορά $\text{var}(X_n)$.
- (δ) Υπολογίστε τα όρια: (i) της πιθανότητας να έχετε φαλιρήσει μετά από n ρίψεις, (ii) της $E[X_n]$, και (iii) της $\text{var}(X_n)$ καθώς το $n \rightarrow \infty$. Βγάλτε κάποια χρήσιμα συμπεράσματα για τη φύση αυτού του παιχνιδιού τύχης. Συμφέρει να το παίζει κανείς;

Άσκηση 4. Έλλειψη μνήμης της γεωμετρικής τ.μ.: Έστω X τ.μ. που ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p . Υπολογίστε τη δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας της X , $p_X(x/X \in A) = P\{X = x/X \in A\}$, δεδομένου ότι η X ανήκει στο σύνολο A , όπου $A = \{X > k\}$ και το k είναι θετικός ακέραιος αριθμός. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 5. Δύο παίκτες ρίχνουν ένα δίκαιο τετράεδρο ζάρι δύο φορές ο καθένας. Ο παίκτης A κερδίζει το μέγιστο των δύο ρίψεων μείον 1, το οποίο συμβολίζουμε με X . Ο παίκτης B κερδίζει το ελάχιστο των δύο ρίψεων, το οποίο συμβολίζουμε με Y .

- (α) Υπολογίστε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των τ.μ. X και Y , $p_{X,Y}(x, y)$, καθώς και τις περιθωριακές σ.π. $p_X(x)$ και $p_Y(y)$.
- (β) Υπολογίστε τις μέσες τιμές των τ.μ. X , Y και $X - Y$.
- (γ) Υπολογίστε τις διασπορές των τ.μ. X και Y .
- (δ) Υπολογίστε τη σ.π. και τη διασπορά της τ.μ. $Z = X - Y$.

Άσκηση 6. Ο Χρήστος παίζει εβδομαδιαία στο λόττο με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από εβδομάδα σε εβδομάδα. Κάθε φορά που παίζει, κερδίζει με πιθανότητα q , ανεξάρτητα από οτιδήποτε άλλο. Για μία περίοδο n εβδομάδων ορίστε τις τ.μ. X : ο αριθμός των εβδομάδων που έπαιξε λόττο και Y : ο αριθμός των εβδομάδων που κέρδισε.

- (α) Ποια η πιθανότητα ότι έπαιξε λόττο μία οποιαδήποτε εβδομάδα, δεδομένου ότι δεν κέρδισε τίποτε εκείνη την εβδομάδα;
- (β) Βρείτε την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{Y/X}(y/x)$.
- (γ) Βρείτε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p_{X,Y}(x, y)$.
- (δ) Βρείτε την περιθωριακή συνάρτηση πιθανότητας $p_Y(y)$.
- (γ) Βρείτε την δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $p_{X/Y}(x/y)$.