ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Δεύτερης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/10/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 08/11/2006

Άσκηση 1.
Για να βρούμε την πιθανότητα ότι ένας διαρρήκτης θα μπει στο θυσαυροφυλάκιο με την πρώτη προσπάθεια, θα πρέπει να διαιρέσουμε τον αριθμό των ευνοϊκών ενδεχομένων με το συνολικό αριθμό ενδεχομένων. Συγκεκριμένα, υπάρχουν $\binom{10}{8}$ ευνοϊκά ενδεχόμενα, δηλαδή επιτυχείς συνδυασμοί οι οποίοι θα ανοίξουν την κλειδαριά. Επίσης, υπάρχουν $\binom{90}{8}$ συνολικά τρόποι για να επιλέξουμε 8 από 90 αριθμούς. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{10}{8}}{\binom{90}{8}} \simeq 5.8053 \cdot 10^{-10}$$

Άσκηση 2.
Την άνοιξη και το φθινόπωρο το δελτίο καιρού μπορεί να λέει ‘‘ήλιος’’ ή ‘‘συννεφιά’’ ή ‘‘βροχή’’. Άρα, για καθεμία από τις δύο αυτές εποχές, ο συνολικός αριθμός των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού είναι 3^{90}. Όμοια, υπάρχουν 4^{90} πιθανές ακολουθίες δελτίων καιρού το χειμώνα (δεν υπάρχει περιορισμός για τις καιρικές συνθήκες) και 2^{90} το καλοκαίρι (δε γίνεται να βρέξει και να χιονίσει). Άρα, ο συνολικός αριθμός ακολουθιών των δελτίων καιρού είναι

$$3^{90} \cdot 3^{90} \cdot 4^{90} \cdot 2^{90} \simeq 10^{167}$$

Άσκηση 3.
(α) Θεωρούμε τα γεγονότα

$$\begin{aligned}
A_{35} &= \{\text{ο Άρης κάνει 3 νίκες σε 5 αγώνες}\} \\
A_{45} &= \{\text{ο Άρης κάνει 4 νίκες σε 5 αγώνες}\} \\
A_{55} &= \{\text{ο Άρης κάνει 5 νίκες σε 5 αγώνες}\} \\
A_{5} &= \{\text{ο Άρης γίνεται πρωταθλητής σε playoff των 5 αγώνων}\} \\
A_{3} &= \{\text{ο Άρης γίνεται πρωταθλητής σε playoff των 3 αγώνων}\} \\
A_{23} &= \{\text{ο Άρης κάνει 2 νίκες σε 3 αγώνες}\} \\
A_{33} &= \{\text{ο Άρης κάνει 3 νίκες σε 3 αγώνες}\}
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση των 5 παιχνιδιών, για να γίνει πρωταθλητής ο Άρης πρέπει να κάνει 3 ή 4 ή 5 νίκες. Άρα, $P(A_5) = P(A_{35} \cup A_{45} \cup A_{55})$. Όμως, τα γεγονότα A_{35}, A_{45}, A_{55} είναι ξένα μεταξύ τους. Άρα, είναι

$$\begin{aligned}
P(A_5) &= P(A_{35}) + P(A_{45}) + P(A_{55}) \\
&= \binom{5}{3} p^3 (1-p)^2 + \binom{5}{4} p^4 (1-p)^1 + \binom{5}{5} p^5 (1-p)^0
\end{aligned}$$

Όμοια, στην περίπτωση των 3 παιχνιδιών ισχύει

$$\begin{aligned}
P(A_3) &= P(A_{23}) + P(A_{33}) \\
&= \binom{3}{2} p^2 (1-p)^1 + \binom{3}{3} p^3 (1-p)^0
\end{aligned}$$

Θέλουμε οι τιμές του p να ικανοποιούν τη σχέση

$$10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 > 3p^2(1-p) + p^3$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $\frac{1}{2} < p < 1$.

(β) Η σειρά σταματάει όταν μια ομάδα φτάσει πρώτη τις $(n+1)/2$ νίκες. Άρα, το να παίξουν οι δύο ομάδες τα υπόλοιπα παιχνίδια δεν επηρεάζει το ποιός κερδίζει τα playoff. Οπότε, ακόμα και τώρα ισχύει ότι $\frac{1}{2} < p < 1$.

Άσκηση 4.
Υποθέτουμε ότι $N \geq 5$. Σε περίπτωση που δεν υπήρχαν περιορισμοί στις θέσεις θα ίσχυε το εξής: η Μαρία μπορεί να παρκάρει σε μία από τις N θέσεις που έχει το πάρκιν και ο Χρήστος μπορεί με τη σειρά του να παρκάρει σε μία απο τίς $N-1$ θέσεις που απομένουν. Έτσι, το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων είναι $N(N-1)$. Έστω ότι A είναι το ενδεχόμενο ότι η Μαρία και ο Χρήστος έχουν παρκάρει σε θέσεις που απέχουν ακριβώς 4. Υπάρχουν $N-4$ δυνατοί τρόποι που η Μαρία παρκάρει αριστερά του Χρήστου και υπάρχουν 3 κενές θέσεις μεταξύ τους. Όμοια, υπάρχουν $N-4$ δυνατοί τρόποι που ο Χρήστος παρκάρει αριστερά της Μαρίας και υπάρχουν 3 κενές θέσεις μεταξύ τους. Έτσι, ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων του A είναι: $(N-4)+(N-4) = 2(N-4)$. Οπότε, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(A) = \frac{\text{αριθμός δυνατών αποτελεσμάτων του A}}{\text{συνολικός αριθμός αποτελεσμάτων}} = \frac{2(N-4)}{N(N-1)}$$

Άσκηση 5.
(α) Ορίζουμε τα γεγονότα A, B ως εξής:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ακριβώς } k \text{ κεφαλές σε } N \text{ ρίψεις}\} \\ B &= \{\text{τουλάχιστον μία ρίψη φέρνει κεφαλή}\} \end{aligned}$$

Θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Όμως,

$$\begin{aligned} P(B) = 1 - P(B^c) &= 1 - P(\text{και οι } N \text{ ρίψεις ήρθαν γράμματα}) \\ &= 1-(1-p)^N \end{aligned}$$

Ξέρουμε, επίσης, ότι η πιθανότητα να έρθουν k κεφαλές και $N-k$ γράμματα είναι $p^k(1-p)^{N-k}$. Όμως, υπάρχουν $\binom{N}{k}$ τρόποι να έρθουν αυτές οι k κεφαλές σε N ρίψεις. Έτσι, $P(A|B) = P(A) = \binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}$ (όπου θεωρήσαμε ότι αφού $k \geq 1$, το γεγονός A περιλαμβάνεται πλήρως στο γεγονός B). Άρα,

$$P(A|B) = \begin{cases} \frac{\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}}{1-(1-p)^N} & ,\text{για } k = 1,2,\ldots,N \\ 0 & ,\text{αλλιώς} \end{cases}$$

(β) Έστω τα γεγονότα

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ήρθε ΚΓΚΓΚΓΚΓΚΓ}\} \\ B &= \{\text{ακριβώς 5 στις 10 ρίψεις ήρθαν κεφαλή}\} \end{aligned}$$

Η πιθανότητα που θέλουμε να βρούμε είναι η $P(A|B)$. Η ακολουθία ΚΓΚΓΚΓΚΓΚΓ είναι μοναδική ανάμεσα σε όλες τις πιθανές ακολουθίες 10 ρίψεων με 5 κεφαλές και 5 γράμματα. Οπότε, για να υπολογίσουμε την $P(A|B)$ απομένει να βρούμε το συνολικό αριθμό ακολουθιών με 5 κεφαλές και 5 γράμματα, που είναι $\binom{10}{5}$. Άρα, $P(A|B) = 1/\binom{10}{5}$.

(γ) Έστω τα γεγονότα

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ακριβώς 3 γράμματα ήρθαν στις 6 πρώτες ρίψεις}\} \\ B &= \{\text{6 από τις 10 ρίψεις ήρθαν κεφαλή}\} \end{aligned}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{P(B,A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(A) &= \binom{6}{3} p^3 (1-p)^3 \\ P(B) &= \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει ότι $P(B|A) = P(\text{ήρθαν 3 κεφαλές στις 4 τελευταίες ρίψεις}) = \binom{4}{3} p^3 (1-p)$. Οπότε,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{\binom{4}{3} p^3 (1-p) \cdot \binom{6}{3} p^3 (1-p)^3}{\binom{10}{6} p^6 (1-p)^4} \\ &= \frac{8}{21} \end{aligned}$$

Άσκηση 6.

(α) Στην τράπουλα υπάρχουν συνολικά 4 άσσοι. Άρα, η πιθανότητα το χαρτί στην κορυφή να είναι άσσος ειναι ίση με 4/52=1/13.

(β)

- Είναι πάλι 4/52=1/13, αφού κάθε χαρτί έχει ίδια πιθανότητα να είναι δεύτερο στην τράπουλα, και εφόσον υπάρχουν 4 άσσοι στα 52 χαρτιά συνολικά, προκύπτει 4/52=1/13.
- Υποθέτουμε ότι το πρώτο χαρτί είναι άσσος. Η πιθανότητα το δεύτερο χαρτί να είναι ρήγας, είναι 4/51, αφού υπάρχουν 51 χαρτιά που έχουν απομείνει στην τράπουλα, 4 από τα οποία είναι ρηγάδες. Άρα, εφόσον κάθε χαρτί έχει ίδια πιθανότητα να είναι οπουδήποτε στην τράπουλα, έχουμε ότι η πιθανότητα είναι ίση με 4/51.

(γ) Επιλέγουμε 7 χαρτιά από την τράπουλα. Υπάρχουν $\binom{52}{7}$ τρόποι για να κάνουμε αυτή την επιλογή.

- Έστω το γεγονός $A = \{\text{στα 7 χαρτιά υπάρχουν ακριβώς 3 άσσοι}\}$. Για να βρούμε την $P(A)$ πρέπει πρώτα να μετρήσουμε με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε 7 χαρτιά με ακριβώς 3 άσσους. Μπορούμε να επιλέξουμε τους 3 από τους 4 συνολικά άσσους της τράπουλας με $\binom{4}{3}$ τρόπους. Από τα 48 χαρτιά που απομένουν (τα οποία δεν περιέχουν άσσους), υπάρχουν $\binom{48}{4}$ τρόποι να επιλέξουμε τα υπόλοιπα 4 χαρτιά από την τράπουλα. Άρα, υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{48}{4}$ διαφορετικοί τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά με ακριβώς 3 άσσους. Οπότε, διαιρώντας με τον αριθμό των τρόπων που μπορούμε να επιλέξουμε 7 χαρτιά από την τράπουλα, έχουμε ότι

$$P(A) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4}}{\binom{52}{7}}$$

- Έστω B το γεγονός ότι στα 7 χαρτιά υπάρχουν ακριβώς 2 ρηγάδες. Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$P(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{5}}{\binom{52}{7}}$$

- Τώρα θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα ότι στα 7 χαρτιά υπάρχουν ακριβώς 3 άσσοι ή ακριβώς 2 ρηγάδες ή και τα δύο. Δηλαδή, ψάχνουμε για την $P(A+B)$, όπου $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A,B)$. Οι $P(A)$, $P(B)$ είναι γνωστές από παραπάνω. Άρα, αρκεί να βρούμε την $P(A,B)$. Υπάρχουν $\binom{4}{3}$ τρόποι να διαλέξουμε 3 από τους 4 άσσους της τράπουλας, $\binom{4}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε 2 από τους 4 ρηγάδες και $\binom{44}{2}$ τρόποι να διαλέξουμε τα άλλα 2 χαρτιά (που δεν είναι ούτε άσσοι ούτε ρηγάδες). Επομένως, υπάρχουν $\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}$ τρόποι να επιλέξουμε 7 χαρτιά με 3 άσσους και 2 ρηγάδες ακριβώς. Άρα, είναι

$$P(A,B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$

Οπότε,

$$P(A+B) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{5} - \binom{4}{3}\binom{4}{2}\binom{44}{2}}{\binom{52}{7}}$$