

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

HY-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Δεύτερη Σειρά Ασκήσεων - Στοιχεία Συνδυαστικής Ανάλυσης

Ημερομηνία Ανάθεσης: 25/10/2006

Ημερομηνία Παράδοσης: 8/11/2006

Άσκηση 1. Το θησαυροφυλάκιο μιας τράπεζας έχει κλειδαριά με συνδυασμό που απαιτεί για να ανοίξει την εισαγωγή σε οποιαδήποτε σειρά 8 διαφορετικών ακεραίων αριθμών από το 1 μέχρι και το 90. Ειδικά η κλειδαριά αυτή επιτρέπει τη χρήση 10 διαφορετικών ακεραίων αριθμών, δηλαδή η κλειδαριά ανοίγει όταν εισάγονται οποιοδήποτε 8 από τους 10 αριθμούς. Υπολογίστε την πιθανότητα ότι ένας διαρρήκτης θα μπει στο θησαυροφυλάκιο με την πρώτη προσπάθεια.

Άσκηση 2. Το δελτίο καιρού για μία τυχαία μέρα του έτους μπορεί να λέει "ήλιος", "συννεφιά", "βροχή", ή "χιόνι". Υποθέτουμε τέσσερις εποχές (φθινόπωρο, χειμώνας, άνοιξη, καλοκαίρι) με 90 μέρες στην κάθε εποχή, ότι χιόνι μπορεί να πέσει μόνο τον χειμώνα, και ότι δεν βρέχει το καλοκαίρι. Πόσα ετήσια δελτία καιρού είναι δυνατά (δηλαδή ποιο είναι το πλήθος όλων των δυνατών ακολουθιών δελτίων καιρού 360-μερών).

Άσκηση 3. Ο Άρης και ο ΠΑΟΚ παίζουν στα playoff του πρωταθλήματος μπάσκετ σε μία σειρά n παιχνιδιών, όπου το n είναι περιττός αριθμός. Η ομάδα που κερδίζει τα περισσότερα παιχνίδια, παίρνει το πρωτάθλημα. Ο Άρης κερδίζει ένα παιχνίδι με πιθανότητα p , ανεξάρτητα από παιχνίδι σε παιχνίδι. Υποθέτουμε ότι παίζονται και τα n παιχνίδια της σειράς.

(α) Υπολογίστε το εύρος τιμών του p για το οποίο συμφέρει καλύτερα στην ομάδα του Άρη να παίζει σε μία σειρά playoff 5 παιχνιδιών αντί σε μία σειρά 3 παιχνιδιών. Τι παρατηρείτε;

(β) Αλλάζει η απάντησή σας στο (α) αν θεωρήσετε πώς πραγματικά παίζονται τα playoffs: Ότι η σειρά σταματάει όταν μία ομάδα φτάσει πρώτη στις $(n + 1)/2$ νίκες;

Άσκηση 4. Η Μαρία και ο Χρήστος παρκάρουν τα αυτοκίνητά τους σε ένα άδειο πάρκινγκ το οποίο έχει N θέσεις σε μία σειρά, όπου $N \geq 5$. Υποθέτοντας τυχαία επιλογή θέσης, υπολογίστε την πιθανότητα ότι παρκάρουν σε θέσεις που απέχουν 4 (δηλαδή, υπάρχουν ακριβώς 3 κενές θέσεις μεταξύ τους).

Άσκηση 5. Θεωρίστε ένα κέρμα για το οποίο ισχύει ότι $P(K) = p$ και $P(\Gamma) = 1 - p$.

(α) Ρίχνουμε το κέρμα N φορές. Έστω k ένας θετικός ακεραίος αριθμός. Δεδομένου ότι τουλάχιστον μία ρίψη φέρνει κεφαλή (K), υπολογίστε την πιθανότητα ότι έρχονται ακριβώς k κεφαλές στις N ρίψεις.

(β) Ρίχνουμε το κέρμα 10 φορές. Ακριβώς 5 από τις 10 ρίψεις φέρνουν κεφαλή. Δεδομένης αυτής της πληροφορίας, υπολογίστε την πιθανότητα της ακολουθίας KTKTKTKTKTK.

(γ) Ρίχνουμε το κέρμα 10 φορές. Ακριβώς 6 από τις 10 ρίψεις φέρνουν κεφαλή. Δεδομένης αυτής της πληροφορίας, υπολογίστε την πιθανότητα ότι ήρθαν ακριβώς 3 γράμματα (Γ) στις 6 πρώτες ρίψεις.

Άσκηση 6. Μία τράπουλα αποτελείται από 52 χαρτιά. Την ανακατεύουμε καλά και την τοποθετούμε στο τραπέζι.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι το χαρτί στην κορυφή είναι άσσος;

(β) Κάνετε το εξής: Επιλέγετε ένα χαρτί, το βλέπετε, το βάζετε στην άκρη και κατόπιν επιλέγετε ένα δεύτερο χαρτί.

- Πριν κάνετε τα παραπάνω, ποια η πιθανότητα ότι το δεύτερο χαρτί είναι άσσος;
- Έστω ότι το πρώτο χαρτί είναι άσσος. Ποια η πιθανότητα ότι το δεύτερο χαρτί είναι ρήγας;

(γ) Επιλέγετε 7 χαρτιά από την τράπουλα.

- Ποια η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 3 άσσους;
- Ποια η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 2 ρηγάδες;
- Ποια η πιθανότητα ότι το χέρι των 7 χαρτιών περιέχει ακριβώς 3 άσσους ή ακριβώς 2 ρηγάδες ή και τα δύο;