ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις Πρώτης Σειράς Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/10/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 30/10/2006

Άσκηση 1.
(α) Δίνεται ότι $P(A) = 3/7$ και ότι τα ενδεχόμενα A, B, C είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Οπότε, θα ισχύει: $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap B \cap C = \emptyset$.
Χρησιμοποιώντας τους κανόνες De Morgan ξέρουμε ότι $(B^c \cup C^c)^c = B \cap C$. Οπότε

$$\begin{aligned} P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) &= P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) \\ &= P(A) = 3/7 \end{aligned}$$

αφού $B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(B \cap C) = 0$ και $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$

(β) Δίνεται ότι $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$ και $P(A \cap C) = 0$. Οπότε, εφαρμόζοντας ξανά τους κανόνες De Morgan θα έχουμε

$$\begin{aligned} P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) &= P(A \cup (B \cap C)) = P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B \cap C) = 5/6 \end{aligned}$$

διότι $P(A \cap C) = 0 \Rightarrow A \cap C = \emptyset$ και $A \cap B \cap C \subseteq A \cap C$.
Άρα, $A \cap B \cap C = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0$

(γ) Δίνεται ότι $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.65$. Εφαρμόζοντας τους κανόνες De Morgan προκύπτει ότι $(A^c \cap (B^c \cup C^c))^c = A \cup (B^c \cup C^c)^c$ που είναι το γεγονός του οποίου την πιθανότητα θέλουμε να βρούμε. Όποτε, ισχύει ότι

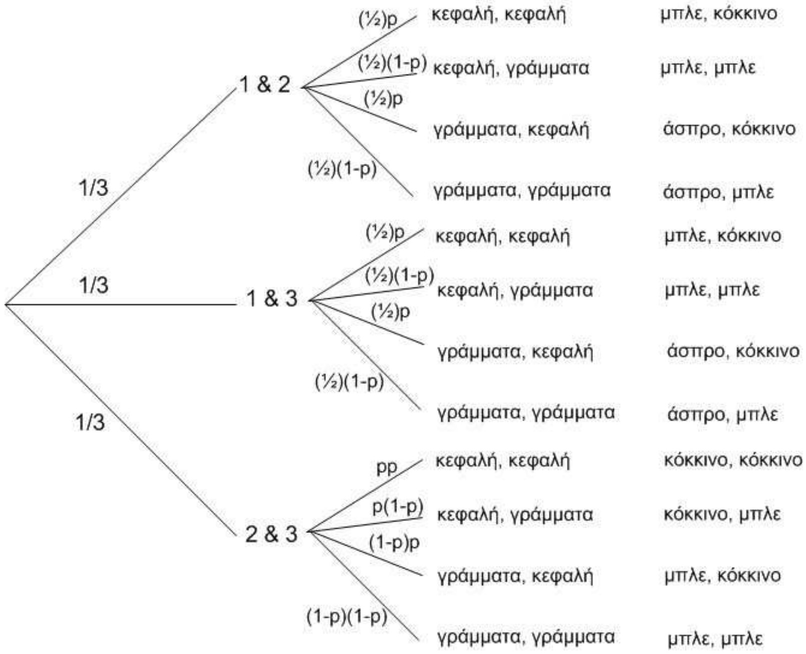
$$P(A \cup (B^c \cup C^c)^c) = 1 - P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 1 - 0.65 = 0.35$$

Άσκηση 2.
(α) Το πείραμα θεωρούμε ότι γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση γίνεται η επιλογή των δύο κερμάτων, ενώ στη δεύτερη φάση γίνεται το ρίξιμο αυτών. Υπάρχουν τρεις διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να γίνει η επιλογή δύο κερμάτων από ένα σύνολο τριών: επιλέγουμε το πρώτο και το δεύτερο ή το πρώτο και το τρίτο ή το δεύτερο και το τρίτο. Καθένα από αυτά τα ζευγάρια έχει την ίδια πιθανότητα επιλογής. Επίσης, για κάθε ζευγάρι κερμάτων υπάρχουν τα εξής ενδεχόμενα ρίψεων: (κεφαλή, κεφαλή), (κεφαλή, γράμματα), (γράμματα, κεφαλή), (γράμματα, γράμματα). Άρα, ο δειγματοχώρος μπορεί να περιγραφεί με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 1.

(β) Η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά τη ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι:

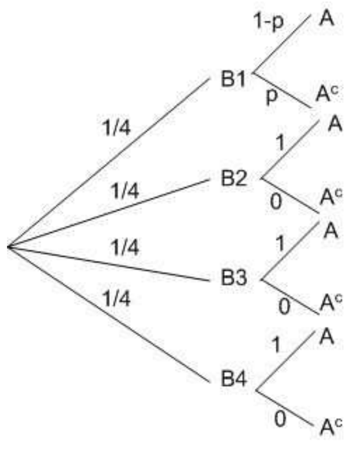
$$\begin{aligned} P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) &= P((\text{μπλε,μπλε})) + P((\text{κόκκινο,κόκκινο})) \\ &= \frac{1}{3}\Big\{\frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) + p^2 + (1-p)^2\Big\} \\ &= \frac{1}{3}(2p^2 - 3p + 2) \end{aligned}$$

Όμως, $P(\text{πλευρές με ίδιο χρώμα}) = 29/96$.
Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $(1/3)(2p^2 - 3p + 2) = 29/96$, βρίσκουμε ότι $p = 5/8$ ή $p = 7/8$.



Σχήμα 1: Δενδρική αναπαράσταση ζητήματος 2.(α)

Άσκηση 3.
Έστω A το ενδεχόμενο ότι ο φίλος σας ψάχνει στη δισκέτα 1 και δε βρίσκει τίποτα, και έστω B_i το ενδεχόμενο ότι η εργασία σας είναι στη δισκέτα i. Άρα, ο δειγματικός χώρος είναι ο εξής



Σχήμα 2: Δενδρική αναπαράσταση Άσκησης 3

Παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα B_1, B_2, B_3 και B_4 αποτελούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου. Όποτε, εφαρμόζουμε τον κανόνα του Bayes για να βρούμε την πιθανότητα ότι η εργασία βρίσκεται στη δισκέτα i δεδομένου ότι ο φίλος ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να την ανακτήσει:

$$\begin{aligned} P(B_i|A) &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)+P(B_4)P(A|B_4)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}P(A|B_i)}{\frac{1}{4}\cdot(1-p)+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 1} = \frac{P(A|B_i)}{4-p} \end{aligned}$$

Άρα,

$$P(B_i|A) = \begin{cases} (1-p)/(4-p) & ,\text{για } i=1 \\ 1/(4-p) & ,\text{για } i=2,3,4 \end{cases}$$

Άσκηση 4.
Έστω A_0 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 0, έστω A_1 το ενδεχόμενο ότι διαβάζω το bit 1, έστω B_0 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 0 και έστω B_1 το ενδεχόμενο ότι το bit που διαβάζω είναι πράγματι 1. Οπότε, ισχύουν οι εξής πιθανότητες: $P(B_0|A_0) = 0.9$, $P(B_1|A_1) = 0.85$, $P(B_1|A_0) = 1 - P(B_0|A_0) = 1 - 0.9 = 0.1$, $P(B_0) = P(B_1) = 1/2$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(B_1|A_1)$. Από τον κανόνα του Bayes θα ισχύει:

$$\begin{aligned} P(B_1|A_1) &= \frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_0)P(A_1|B_0)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}0.85}{\frac{1}{2}0.85+\frac{1}{2}0.1} \\ &\cong 0.895 \end{aligned}$$

Άσκηση 5.
Αφού $A \subset B$ θα είναι: $A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)$. Όμως, για να είναι τα A, B ανεξάρτητα θα πρέπει: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Οπότε, τα γεγονότα A, B θα είναι ανεξάρτητα αν και μόνο αν $P(A) = 0$ ή $P(B) = 1$. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση που το A είναι το κενό σύνολο ή στην περίπτωση που το B είναι το υπερσύνολο Ω.

Άσκηση 6.
(α) Αληθής
Ισχύει ότι: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$ δηλαδή τα A και B είναι ανεξάρτητα. Και αφού το B είναι ανεξάρτητο του A, θα είναι επίσης ανεξάρτητο του A^c. Από ορισμό της ανεξαρτησίας έχουμε ότι $P(B|A^c) = P(B)$.

(β) Ψευδής
Αφού από τις 10 ρίψεις μόνο οι 5 ήρθαν γράμματα, σημαίνει ότι η γνώση για μία ρίψη παρέχει γνώση για τις υπόλοιπες ρίψεις. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα δεν είναι ανεξάρτητα. Με άλλα λόγια, η γνώση ότι η πρώτη ρίψη ήταν γράμματα επηρεάζει την πιθανότητα ότι η δέκατη ρίψη είναι γράμματα.

(γ) Αληθής
Σε αυτό το ερώτημα όλες οι ρίψεις έφεραν γράμματα. Έστ, η γνώση μας για μία ρίψη δεν παρέχει καμιά πρόσθετη γνώση σχετικά με την δέκατη ρίψη. Επομένως, τα δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα.

(δ) Αληθής
Τα γεγονότα A_i είναι ξένα. Εφαρμόζουμε το νόμο της ολικής πιθανότητας στο ενδεχόμενο $B \cap C$:

$$\begin{aligned} P(B|C) &= \frac{P(B\cap C)}{P(C)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i)P(B\cap C|A_i)}{P(C)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i)\frac{P(B\cap C\cap A_i)}{P(A_i)}}{P(C)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i\cap B\cap C)}{P(C)} \end{aligned}$$

Όμως, το δεξί μέλος της σχέσης που μας δίνεται προς απόδειξη, δίνει:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i|C)P(B|A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i\cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)} \tag{1}$$

Δίνεται ότι τα B, C είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα δεδομένου των A_i, για όλα τα i. Άρα:

$$P(B\cap C|A_i) = P(B|A_i)P(C|A_i) = (P(B\cap A_i)/P(A_i)) \cdot (P(C\cap A_i)/P(A_i))$$

Όμως, $P(B\cap C|A_i) = P(B\cap C\cap A_i)/P(A_i)$. Συνδυάζοντας τις δύο πρηγούμενες σχέσεις, προκύπτει ότι:

$$P(A_i\cap C)\cdot P(B\cap A_i)/P(A_i) = P(B\cap C\cap A_i)$$

Άρα,

$$(1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i\cap B\cap C)}{P(C)}$$

Άσκηση 7.
(α) Θέλουμε να δείξουμε ότι $P(B|A) > P(B)$. Άρα, θα ισχύει:

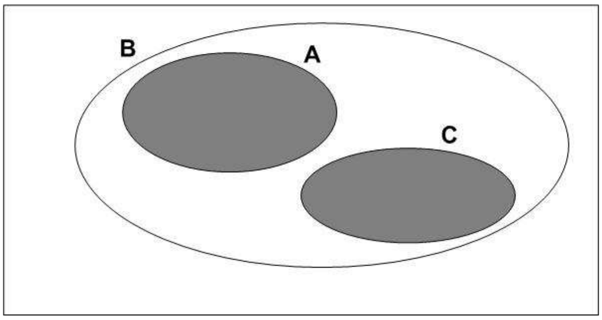
$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} > \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B) \\ &\Rightarrow P(B|A) > P(B) \end{aligned}$$

όπου για να καταλήξουμε στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $P(A|B) > P(A)$.

(β) Έστω ότι $P(B) = 1$. Τότε θα ισχύει ότι $P(A|B) = P(A\cap B)/1 \leq P(A)$ (αφού $A\cap B \subset A$). Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί τότε το B δεν έλκει το A (πρέπει $P(A|B) > P(A)$). Άρα, $P(B) < 1$, δηλαδή $1 - P(B^c) < 1 \Rightarrow P(B^c) > 0$.
Τώρα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \Rightarrow \\ P(A)[P(B)+P(B^c)] &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \Rightarrow \\ \underbrace{P(B)[P(A|B)-P(A)]}_{(X)} &+ \underbrace{P(B^c)[P(A|B^c)-P(A)]}_{(Y)} = 0 \end{aligned}$$

Για τον όρο X ισχύει: $X > 0$, γιατί $P(B) > 0$ και $P(A|B) > P(A) \Rightarrow P(A|B) - P(A) > 0$ (αφού το B έλκει το A). Επομένως, ο όρος Y θα πρέπει να είναι αυστηρά αρνητικός, έτσι ώστε οι δύο όροι να δίνουν άθροισμα 0. Άρα, εφόσον $Y < 0$ και $P(B^c) > 0$, θα είναι $P(A|B^c) - P(A) < 0$ δηλαδή $P(A|B^c) < P(A)$. Οπότε, το B^c απωθεί το A.



Σχήμα 3: Διάγραμμα Venn ζητήματος 7.(γ)

(γ) Εάν το A έλκει το B και το B έλκει το C, τότε το A δεν έλκει πάντα το C. Αυτό προκύπτει με βάση το παρακάτω αντιπαράδειγμα:
Έστω A, C δύο ξένα σύνολα, όπου και τα δύο είναι αυστηρά υποσύνολα ενός τρίτου συνόλου B. Θεωρούμε ότι η πιθανότητα όλων των γεγονότων δεν είναι ούτε 0 ούτε 1.

Αυτή η κατάσταση περιγράφεται από το διάγραμμα Venn του σχήματος 3. Αφού το A είναι υποσύνολο του B και $P(B) < 1$, η δέσμευση πάνω στο γεγονός B αυξάνει την πιθανοφάνεια της εμφάνισης του γεγονότος A. Επομένως, το γεγονός B έλκει το A (και χρησιμοποιώντας το ερ.(α), λέμε ότι, επίσης, και το A έλκει το B). Με τον ίδιο συλλογισμό καταλήγουμε ότι και το B έλκει το C. Όμως, τα A και C είναι ξένα σύνολα, άρα $P(C|A) = 0 < P(C)$, δηλαδή το A δεν έλκει το C.

Άσκηση 8.
(α) Για να βρούμε τις πιθανότητες των B_i χρησιμοποιούμε το νόμο της ολικής πιθανότητας

$$\begin{aligned}
P(B_0) &= P(B_0|A_0)P(A_0) + P(B_0|A_1)P(A_1) + P(B_0|A_2)P(A_2) \\
&= (1-\epsilon)\frac{1}{2} + 0\frac{1}{4} + \epsilon\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\epsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= P(B_1|A_0)P(A_0) + P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2) \\
&= \epsilon\frac{1}{2} + (1-\epsilon)\frac{1}{4} + 0\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\epsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2|A_0)P(A_0) + P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) \\
&= 0\frac{1}{2} + \epsilon\frac{1}{4} + (1-\epsilon)\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Όπως είναι αναμενόμενο, το άθροισμα των B_i είναι 1.

(β) Οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι

$$\begin{aligned}
P(A_0|B_1) &= \frac{P(A_0, B_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1, A_0)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1|A_0)P(A_0)}{P(B_1)} \\
&= \frac{\epsilon\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\epsilon} \\
&= \frac{2\epsilon}{1+\epsilon},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_1|B_1) &= \frac{P(A_1, B_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1, A_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{(1-\epsilon)\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\epsilon} \\
&= \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A_2|B_1) &= \frac{P(A_2, B_1)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1, A_2)}{P(B_1)} \\
&= \frac{P(B_1|A_2)P(A_2)}{P(B_1)} \\
&= \frac{0\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\epsilon} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ξανά παρατηρούμε ότι το άθροισμα των παραπάνω πιθανοτήτων είναι 1 (όπως ήταν αναμενόμενο).