ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Χειμερινό Εξάμηνο 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Πρώτη Σειρά Ασκήσεων

Ημερομηνία Ανάθεσης: 16/10/2006 Ημερομηνία Παράδοσης: 30/10/2006

Άσκηση 1. Υπολογίστε την πιθανότητα $P(A \cup (B^c \cup C^c)^c)$ για τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

(α) Τα A, B, C είναι ανά δύο ξένα και $P(A) = 3/7$.
(β) $P(A) = 1/2$, $P(B \cap C) = 1/3$ και $P(A \cap C) = 0$.
(γ) $P(A^c \cap (B^c \cup C^c)) = 0.65$.

Άσκηση 2. Μας δίνονται τρία κέρματα. Το πρώτο είναι ένα δίκαιο κέρμα και είναι βαμμένο μπλε στην κεφαλή (Κ) και άσπρο στα γράμματα (Γ). Τα άλλα δύο κέρματα δεν είναι δίκαια και έχουν πιθανότητα να έρθει κεφαλή ίση με p. Είναι βαμμένα κόκκινο στην κεφαλή και μπλε στα γράμματα. Διαλέγουμε τυχαία δύο από τα τρία κέρματα και τα ρίχνουμε.

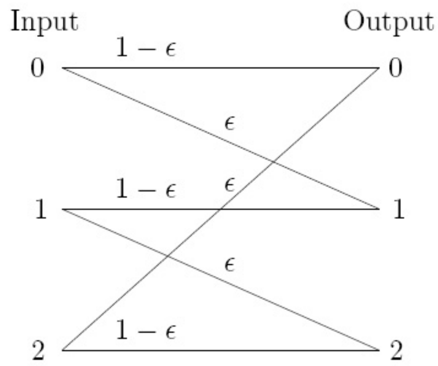
(α) Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος.
(β) Υπολογίστηκε εμπειρικά ότι η πιθανότητα και οι δύο πλευρές που έρχονται μετά την ρίψη των δύο κερμάτων να είναι βαμμένες με το ίδιο χρώμα είναι 29/96. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές για το p;

Άσκηση 3. Υποθέστε ότι ήσασταν αρκετά απερίσκεπτοι ώστε να σώσετε την εργασία σας στο ΗΥ-150 μόνο σε μία δισκέτα, η οποία δυστυχώς κράσαρε. Ακόμα χειρότερα, την είχατε φυλάξει σε ένα συρτάρι με άλλες τρεις επίσης χαλασμένες δισκέτες. Πριν πάρετε τις 4 δισκέτες σε έναν ειδικό για να ανακτήσετε την εργασία σας, ένας φίλος σας προσφέρεται να ρίξει μία ματιά και να σας γλυτώσει από τα έξοδα. Επιλέγετε λοιπόν τυχαία μία δισκέτα και την παραδίδετε στον φίλο σας. Αν η εργασία σας βρίσκεται στη δισκέτα που δίνετε στο φίλο σας, αυτός θα την ανακτήσει με πιθανότητα p. Δεδομένου ότι ψάχνει στη δισκέτα 1 αλλά δεν μπορεί να ανακτήσει την εργασία σας, ποια είναι η πιθανότητα ότι η εργασία σας βρίσκεται στην δισκέτα $i, \ i = 1, 2, 3, 4$;

Βοήθεια: Περιγράψτε το δειγματοχώρο αυτού του πειράματος τύχης με χρήση δενδρικού διαγράμματος και χρησιμοποιείστε το νόμο του Bayes.

Άσκηση 4. Μία μαγνητική ταινία η οποία περιέχει πληροφορία σε ψηφιακή μορφή έχει αλλοιωθεί. Προσπαθείτε να ανακτήσετε όσο το δυνατόν περισσότερα bits πληροφορίας. Προφανώς γνωρίζετε ότι αυτό που διαβάζετε πιθανώς είναι λάθος. Γνωρίζετε ότι αν υπήρχε ένα 0, η πιθανότητα να το διαβάσετε σωστά είναι 0.9. Επίσης, η πιθανότητα σωστής ανάγνωσης ενός 1 είναι 0.85. Κάθε bit στην ταινία είναι 0 ή 1 με την ίδια πιθανότητα. Δεδομένου ότι διαβάζετε 1 για κάποιο bit, ποια η πιθανότητα ότι το έχετε διαβάσει σωστά;

Άσκηση 5. Έστω δύο γεγονότα A και B τέτοια ώστε $A \subset B$. Μπορεί να είναι τα A και B ανεξάρτητα; Κάτω από ποιες προϋποθέσεις;



Σχήμα 1: Τριαδικό τηλεπικοινωνιακό κανάλι.

Άσκηση 6. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις, αναφέρετε αν είναι σωστή ή λάθος και αιτιολογίστε την απάντησή σας.

(α) Αν $P(A/B) = P(A)$, τότε $P(B/A^c) = P(B)$.
(β) Αν 5 από τις 10 ανεξάρτητες ρίψεις ενός δίκαιου κέρματος έφεραν γράμματα, τότε τα γεγονότα "η πρώτη ρίψη έφερε γράμματα" και "η 10η ρίψη έφερε γράμματα" είναι ανεξάρτητα.
(γ) Αν 10 στις 10 ανεξάρτητες ρίψεις ενός δίκαιου κέρματος έφεραν γράμματα, τότε τα γεγονότα "η πρώτη ρίψη έφερε γράμματα" και "η 10η ρίψη έφερε γράμματα" είναι ανεξάρτητα.
(δ) Αν τα γεγονότα $A_1, \ldots, A_n$ αποτελούν μία διαμέριση του δειγματοχώρου, και αν B, C είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητα γεγονότα δεδομένων των A_i για κάθε i, τότε

$$P(B/C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i/C)P(B/A_i).$$

Άσκηση 7. Λέμε ότι το γεγονός B *απωθεί* το γεγονός A αν ισχύει ότι $P(A/B) < P(A)$ και ότι το γεγονός B *έλκει* το γεγονός A αν ισχύει ότι $P(A/B) > P(A)$.

(α) Δείξτε ότι αν το B έλκει το A, τότε το A έλκει το B.
(β) Δείξτε ότι αν το B έλκει το A, τότε το B^c απωθεί το A.
(γ) Αν το A έλκει το B και το B έλκει το C, τότε το A έλκει το C; (Αποδείξτε ότι ισχύει ή δώστε ένα αντιπαράδειγμα. Υποθέστε ότι όλα τα γεγονότα έχουν μη μηδενική πιθανότητα).

Άσκηση 8. Το διάγραμμα μετάβασης πιθανοτήτων ενός τριαδικού τηλεπικοινωνιακού καναλιού δίνεται στο Σχήμα 1. Όπως φαίνεται, η πιθανότητα να ληφθεί 0 (ή 1, ή 2) ενώ έχει σταλεί 0 (ή 1, ή 2, αντίστοιχα) είναι $1-\epsilon$. Δηλαδή, $P(0$ received$/0$ sent$)$ =P(1 received /1 sent)= $P(2$ received$/2$ sent$) = 1-\epsilon$. Ανάλογα, $P(0$ received$/2$ sent$)$ =P(1 received /0 sent)= $P(2$ received$/1$ sent$) = \epsilon$. Υποθέστε ότι τα τρία σύμβολα 0, 1, 2 στέλνονται με πιθανότητες 1/2, 1/4, 1/4, αντίστοιχα.

Ορίστε τα γεγονότα $A_i = \{$η είσοδος του καναλιού είναι i (δηλαδή εστάλη i)$\}$ και $B_i = \{$η έξοδος του καναλιού είναι i (δηλαδή ελήφθη i)$\}$, $i = 0, 1, 2$.

(α) Υπολογίστε τις πιθανότητες των B_i, $P(B_i)$, $i = 0, 1, 2$.
(β) Δεδομένου ότι ελήφθη 1 (δηλαδή συνέβη το γεγονός B_1), υπολογίστε τις πιθανότητες ότι η εστάλη 0, ή 1, ή 2.