

Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Πρόοδος
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
26 Νοεμβρίου 2005 - Διάρκεια: 2 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες.

Η πιθανότητα ότι ένας άντρας έχει μία συγκεκριμένη ασθένεια είναι $1/20$. Υπάρχει ένα τεστ για την ασθένεια, αλλά δυστυχώς αυτό δεν είναι πάντα ακριβές. Η πιθανότητα να βγει αρνητικό το τεστ ενός ασθενούς άντρα είναι $1/50$, ενώ η πιθανότητα να βγει θετικό το τεστ ενός υγιούς άντρα είναι $1/10$. Το τεστ του Γιάννη βγαίνει θετικό.

- (α) Βρείτε την πιθανότητα ο Γιάννης να είναι ασθενής. Βοήθεια: Ορίστε τα γεγονότα $D = \{\text{Ο άντρας έχει την ασθένεια}\}$ και $T = \{\text{το τεστ είναι θετικό}\}$, και βρείτε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(D/T)$.
- (β) Σας λένε τώρα ότι η αρρώστια είναι κληρονομική από πατέρα σε γιο. Η πιθανότητα ότι ο γιος πάσχει από την ασθένεια αν την έχει ο πατέρας είναι $4/5$, ενώ η πιθανότητα ότι ένας γιος θα προσβληθεί ακόμα και αν ο πατέρας του είναι υγιής είναι $1/95$. Ποια είναι η πιθανότητα ότι ο Γιώργος έχει την ασθένεια δεδομένου ότι ο γιος του είναι ασθενής;

Θέμα 2 - 25 μονάδες

Ένα σώμα ενόρκων αποτελείται από 7 άτομα. Κάθε ένορκος παίρνει λάθος απόφαση με πιθανότητα 0.2, ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους.

- (α) Ορίστε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των ενόρκων που παίρνουν λάθος απόφαση. Δώστε την πλήρη περιγραφή της X (πεδίο τιμών και συνάρτηση πιθανότητας).
- (β) Αν το σώμα των ενόρκων παίρνει αποφάσεις σύμφωνα με τον κανόνα της πλειοψηφίας, ποια είναι η πιθανότητα ότι θα παρθεί λάθος απόφαση;

Θέμα 3 - 25 μονάδες

Παίζω ένα παιχνίδι τένις τριών σετ, που σημαίνει ότι κερδίζω αν πάρω τα 2 από τα 3 σετ. Είμαι καλός παίκτης αλλά κάπως εκτός φόρμας και παίρνω το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σετ με πιθανότητες $2/3$, $1/2$ και $1/3$, αντίστοιχα. Κερδίζω το i -στό σετ ανεξάρτητα από το τι έκανα ή θα κάνω στα υπόλοιπα σετ.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα ότι θα κερδίσω το παιχνίδι;
- (β) Έστω η τ.μ. X που συμβολίζει τον αριθμό του πρώτου σετ που παίρνω. Υποθέστε ότι η X παίρνει την τιμή 0 αν χάσω και στα 3 σετ. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας και τη μέση τιμή της X .
- (γ) Έστω η τ.μ. Y που συμβολίζει το πλήθος των σετ που παίζονται. Βρείτε την συνάρτηση πιθανότητας και τη μέση τιμή της Y .
- Βοήθεια: Συμπληρώστε τον ακόλουθο πίνακα για το πείραμα τύχης.

Ενδεχόμενο	Πιθανότητα	Κερδίζω το παιχνίδι;	Τιμή της X	Τιμή της Y

Θέμα 4 - 25 μονάδες

Ρίχνουμε ταυτόχρονα δύο τριέδρα δίκαια ζάρια. Έστω η τυχαία μεταβλητή X , το άθροισμα των δύο ρίψεων.

- (α) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας, η μέση τιμή, και η διασπορά της τ.μ. X ;
- (β) Ποια είναι η συνάρτηση πιθανότητας της τ.μ. X^2 ; Δώστε τη γραφική της παράσταση.