ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών

ΗΥ-217: Πιθανότητες - Σεπτέμβριος 2006
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης

Λύσεις

Θέμα 1.

Από τον ορισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής και το Σχήμα προκύπτει εύκολα ότι:

(α)

$$P(X=2) = F_X(2) - F_X(2^-) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(β)

$$P(X<2) = F_X(2^-) = \frac{1}{3}.$$

(γ)

$$\begin{aligned} P(\{X=2\} \cup \{0.5 \leq X \leq 1.5\}) &= \\ = P(X=2) + P(0.5 \leq X \leq 1.5) &= \\ = P(X=2) + F_X(1.5) - F_X(0.5) &= \\ = \frac{1}{3} - = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot (0.5)^2 &= \\ = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} P(\{X=2\} \cup \{0.5 \leq X \leq 3\}) &= \\ = P(0.5 \leq X \leq 3) &= \\ = F_X(3) - F_X(0.5) &= \\ = \frac{5}{6} - \frac{1}{12} &= \\ = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Θέμα 2.

(α) Η περιοχή όπου η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι c φαίνεται στο Σχήμα (1). Πρόκειται για ένα τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 1. Για την σταθερά c πρέπει,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int f_{xy}(x,y) dx dy = 1,$$

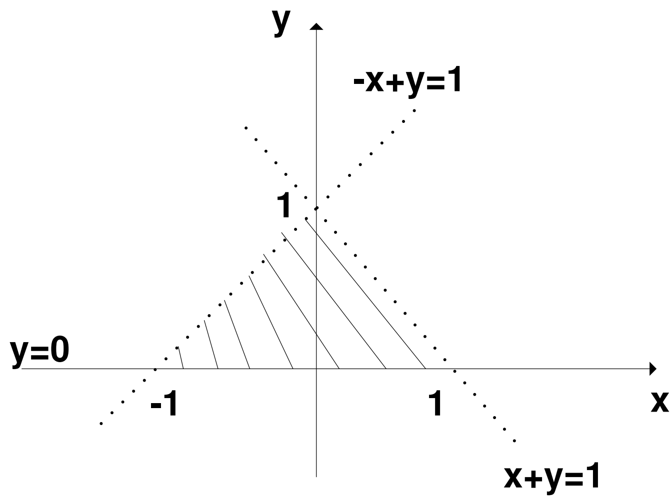
ή

$$c \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1,$$

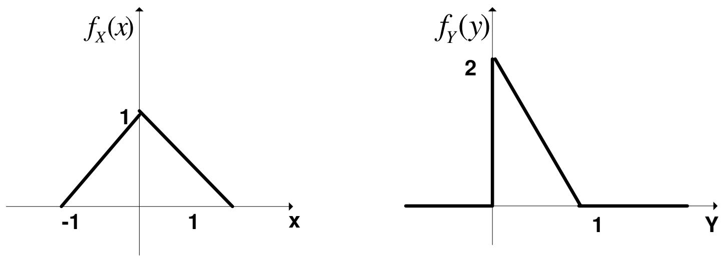
ή

$$c = 1,$$

όπου το γινόμενο $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ είναι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου.



Σχήμα 1: 2(a,i)



Σχήμα 2: 2(a,ii)

Γενικά ισχύει ότι $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$. Από το Σχήμα (1) φαίνεται ότι,

- Για $-1 \leq x \leq 0$, $f_X(x) = \int_0^{1+x} cdy = 1 + x$
- Για $0 \leq x \leq 1$, $f_X(x) = \int_0^{1-x} cdy = 1 - x$.

Άρα,

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & ,-1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & ,0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ,\text{ αλλού.} \end{cases}$$

Ομοίως για $0 \leq y \leq 1$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{y-1}^{1-y} cdx = 2(1-y)$. Δηλαδή,

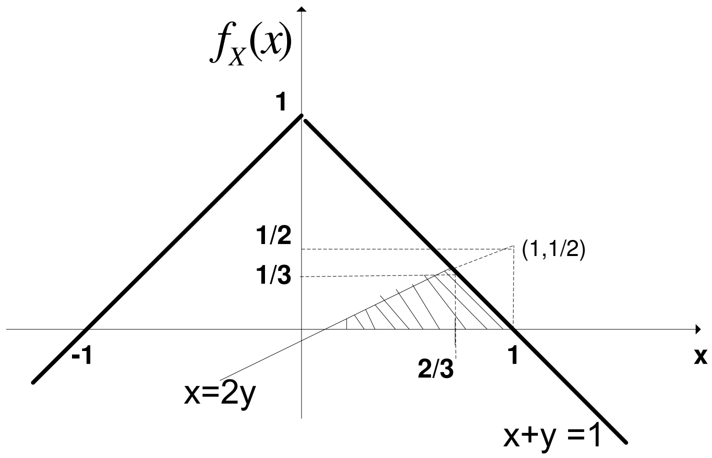
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & ,0 \leq y \leq 1 \\ 0 & ,\text{ αλλού.} \end{cases}$$

Προφανώς, Σχήμα (2), $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ και οι τυχαίες μεταβλητές XY δεν είναι ανεξάρτητες.

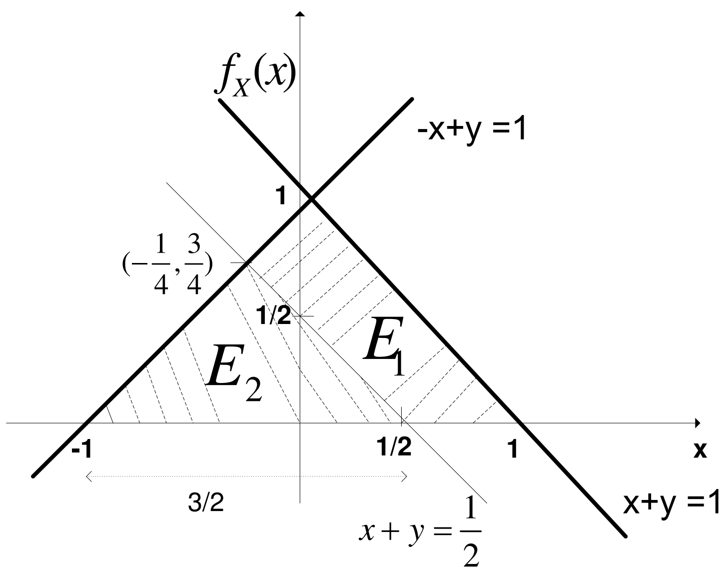
(β) Απαντάται πολύ εύκολα παρατηρώντας τη γραφική παράσταση του Σχήματος (3). Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας στο γραμμοσκιασμένο τρίγωνο με βάση $(0,1)$ και ύψος $\frac{1}{3}$ στο σημείο $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ισούται με την πιθανότητα $P(X \geq 2Y)$. Άρα, $P(X \geq 2Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

(γ) Ομοίως από το Σχήμα (4) έχουμε ότι,

$$P(X+Y) \geq \frac{1}{2}) = c \cdot E_1 = c \cdot (E - E_2) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}) = \frac{7}{16}.$$



Σχήμα 3: 2(β)



Σχήμα 4: 2(γ)

(δ)

$$f_{\frac{X}{Y}}(\frac{x}{y}) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{2(1-y)},\ |x| \leq 1-y,\ 0 < y < 1,$$

$$f_{\frac{Y}{X}}(\frac{y}{x}) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-|x|},\ 0 < y < 1-|x|,\ |x| \leq 1.$$

Θέμα 3.

(α)

$$\begin{aligned} P(990 < X < 1020) = P\Big(\frac{990-1000}{20} < \frac{X-1000}{20} < \frac{1020-1000}{20}\Big) = \\ = P\Big(-\frac{1}{2} < Y < 1\Big) = \Phi(1) - \Phi\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \\ = \Phi(1) - 1 + \Phi\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0.8413 - 1 + 0.6915 = 0.5328, \end{aligned}$$

όπου η Y ακολουθεί κανονική κατανομή $N(0,1)$.

(β)

$$\begin{aligned} P(X < 1020 | X > 990) = \frac{P(990 < X < 1020)}{P(X > 990)} = \\ = \frac{0.5328}{P\Big(\frac{X-1000}{20} > \frac{990-1000}{20}\Big)} = \\ = \frac{0.5328}{P\Big(Y > -\frac{1}{2}\Big)} = \\ = \frac{0.5328}{1-\Phi\Big(-\frac{1}{2}\Big)} = \frac{0.5328}{\Phi\Big(\frac{1}{2}\Big)} = 0.7705. \end{aligned}$$

Θέμα 4.

(α,i)

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\Big(U^{\frac{1}{2}} \leq x\Big) = P\Big(U \leq x^2\Big) = F_U(x^2) = x^2,\ 0 \leq x \leq 1,$$

καθώς η U ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$, τότε $F_U(u) = u$, $0 \leq u \leq 1$. Άρα, $f_X(x) = 2x$, $0 \leq x \leq 1$.

(α,ii)

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-lnU \leq y) = P\Big(U \geq e^{-y}\Big) = 1 - F_U(e^{-y}) = 1 - e^{-y},\ y \geq 0.$$

Άρα, $f_Y(y) = e^{-y}$, $y \geq 0$ και επομένως η τυχαία μεταβλητή Y είναι εκθετική.

Τρόπος παραγωγής δειγμάτων μιας εκθετικής τυχαίας μεταβλητής:
Παράγω δείγματα ομόιόμορφης στο $[0,1]$ τυχαίας μεταβλητής και τα περνώ από το μετασχηματισμό $-ln(u)$.

(α,iii)

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(aU + b \leq z) = \begin{cases} P\Big(U \leq \frac{z-b}{a}\Big) & ,a > 0 \\ P\Big(U \geq \frac{z-b}{a}\Big) & ,a < 0 \end{cases} \\ = \begin{cases} F_U\Big(\frac{z-b}{a}\Big) & ,a > 0 \\ 1 - F_U\Big(\frac{z-b}{a}\Big) & ,a < 0 \end{cases} \\ = \begin{cases} \frac{z-b}{a} & ,a > 0,\ b < z \leq a+b \\ 1 - \frac{z-b}{a} & ,a < 0,\ a+b \leq z < b. \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{a} & ,a > 0,\ b < z \leq a+b \\ -\frac{1}{a} & ,a < 0,\ a+b \leq z < b. \end{cases}$$

(β) Για $x < 0$ η αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι 0, ενώ για $q > 2$ είναι 1. Για $0 \leq x \leq 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= P(X \leq x, H) + P(X \leq x, T) = \\ &= \frac{1}{2}P(X \leq x|H) + \frac{1}{2}P(X \leq x|T) = \\ &= \frac{1}{2}P(1+U \leq x) + \frac{1}{2}P(1-U \leq x) = \\ &= \frac{1}{2}P(U \leq x-1) + \frac{1}{2}P(U \leq 1-x) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\Big(1-(1-x)\Big) & ,0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 1 & ,1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ &= \frac{x}{2},\ 0 < x \leq 2. \end{aligned}$$

Επομένως η X είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,2]$.