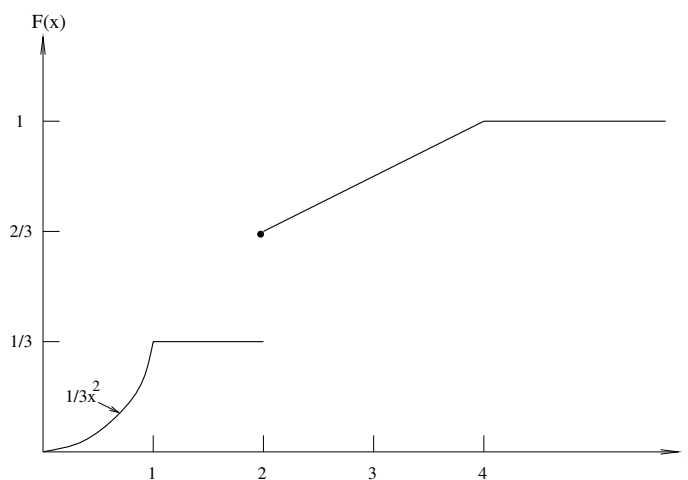


Πανεπιστήμιο Κρήτης - Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών
Θεωρία Πιθανοτήτων - Τελική Εξέταση
Διδάσκων: Π. Τσακαλίδης
Διάρκεια: 3 Ωρες

Θέμα 1 - 25 μονάδες. Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής.

Υπολογισμός πιθανοτήτων από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.): Έστω η τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) X της οποίας η α.σ.κ. φαίνεται στο σχήμα.



Βρείτε την πιθανότητα των ακόλουθων γεγονότων:

- (α) $\{X = 2\}$.
- (β) $\{X < 2\}$.
- (γ) $\{X = 2\} \cup \{0.5 \leq X \leq 1.5\}$.
- (δ) $\{X = 2\} \cup \{0.5 \leq X \leq 3\}$.

Θέμα 2 - 25 μονάδες. Βασικές Έννοιες Κατανομών.

Δύο συνεχείς τ.μ. X και Y έχουν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & y \geq 0, |x| + y \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

(α) Δώστε τη γραφική παράσταση της από κοινού σ.π.π. Υπολογίστε τη σταθερά c και τις περιθωριακές σ.π.π. $f_X(x)$ και $f_Y(y)$. Δώστε τη γραφική παράσταση των δύο σ.π.π. Είναι οι τ.μ. X και Y ανεξάρτητες;

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X \geq 2Y\}$.

(γ) Υπολογίστε την πιθανότητα του γεγονότος $\{X + Y \geq \frac{1}{2}\}$.

(δ) Υπολογίστε τις δεσμευμένες σ.π.π. $f_{X/Y}(x/y)$ και $f_{Y/X}(y/x)$.

Θέμα 3 - 25 μονάδες. Κανονική Κατανομή.

Έστω X κανονική τ.μ. με $X \sim N(1000, 400)$. Βρείτε τις εξής πιθανότητες.

- (α) $P(990 < X < 1020)$
(β) $P(X < 1020 / X > 990)$

Υπόδειξη. Δύο τιμές της CDF της τυπικής κανονικής τ.μ. τις οποίες (με πιθανότητα 1) θα χρειαστείτε: $\Phi(1) = 0.8413$, $\Phi(0.5) = 0.6915$.

Θέμα 4 - 25 μονάδες. Μετασχηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών.

(α) Έστω U τ.μ. ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 1]$. Βρείτε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ.

- (i) $X = U^{1/2}$.
(ii) $Y = -\ln U$. Με βάση την απάντησή σας για την κατανομή της Y , προτείνετε ένα τρόπο παραγωγής τυχαίων δειγμάτων μιας εκθετικής τ.μ.
(ii) $Z = aU + b$, όπου a και b είναι δύο σταθερές.

(β) Η Μαρία μπαίνει σε ένα καζίνο με μία μονάδα κεφαλαίου στην τσέπη της. Κοιτάζει το ρολόι της για να παράξει ένα τυχαίο αριθμό ομοιόμορφα κατανομημένο μεταξύ 0 και 1 ($U \sim \text{Uniform}[0, 1]$), και κατόπιν ποντάρει το ποσό U στο ρίξιμο ενός δίκαιου ζαριού. Επομένως το κεφάλαιό της, X είναι:

$$X = \begin{cases} 1 + U & \text{με πιθανότητα } 0.5 \\ 1 - U & \text{με πιθανότητα } 0.5. \end{cases}$$

Βρείτε την α.σ.κ. και την σ.π.π. της τ.μ. X .